Théorie des Graphes

Université Libanaise
Faculté des Sciences
License Informatique
2ème année – S3

Matrices

Semaine 5

Plan

- Revue des concepts matriciels
- La matrice d’adjacence
- La matrice de distance

Revue des concepts matriciels
Question 1

Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont toutes les entrées non diagonales sont nulles. Montrer que si D est une matrice diagonale, alors D^k est aussi diagonale, et ses entrées diagonales sont les $k$èmes puissances des entrées diagonales correspondantes de D.

Revue des concepts matriciels
Question 2

Montrer que $(A + B)^t = A^t + B^t$.

Plan

- Revue des concepts matriciels
- La matrice d’adjacence
- La matrice de distance

La matrice d’adjacence
Question 3

Que peut-on dire d'une carte aérienne avec matrice de d’adjacence A si la matrice $A + A^2$ a une entrée nulle?

La matrice d’adjacence
Question 4

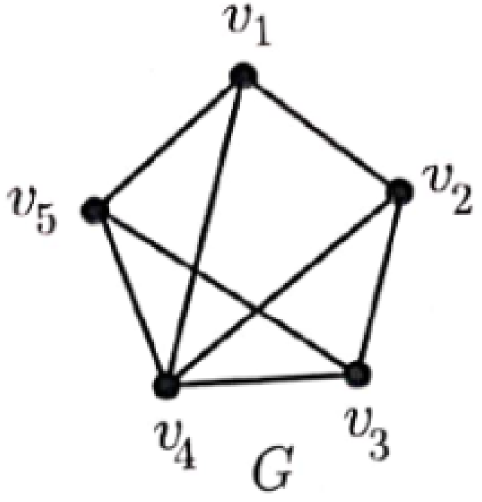
Dessiner la matrice d'adjacence pour $K_4 - e$, où les sommets sont étiquetés v_1, v_2, v_3, v_4 et $v_3 v_4$ est l'arête manquante.

La matrice d’adjacence
Question 5

Que dire de deux sommets v_i et v_j dans G si les lignes i et j de la matrice de d’adjacence sont identiques?

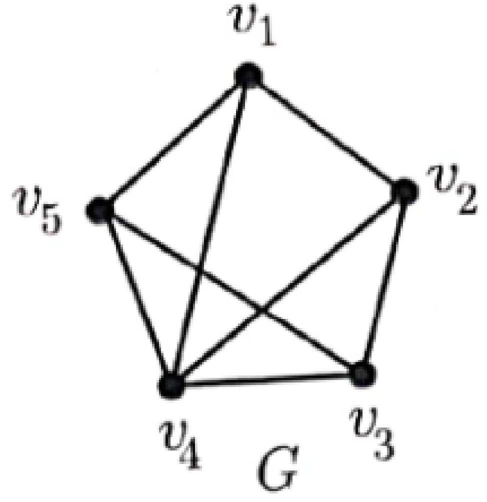
La matrice d’adjacence Question 6 – part I

1. Trouver A, A^2, et A^3.
2. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3.
3. Déterminer la trace de A^3 et le nombre de triangles (K_3). Comment vos réponses coïncident-elles avec ce qui devrait se passer selon le théorème suivant? **Théorème**. Le nombre de triangles dans un graphique G est la trace de A^3 divisée par 6



La matrice d'adjacence Question 6 – part II

Soit les arêtes étiquetées de façon à ce que $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_1v_4, e_3 = v_1v_5, e_4 = v_2v_3, e_5 = v_2v_4, e_6 = v_3v_4, e_7 = v_3v_5, e_8 = v_4v_5$.



4. Écrire la matrice d'incidence M.
5. Vérifier le théorème suivant.
   Théorème. Soit un graphe G avec $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, alors pour la matrice d'adjacence A, la matrice d'incidence M et la matrice diagonale D, où $d_{ii} = \deg(v_i)$, on a un $MM^t = A + D$.

La matrice d’adjacence
Question 7

Considérez n'importe quel graphe biparti G, calculez A^3, que pouvez-vous dire à propos de $(A^3)_{ii}$ pour tout i.

Plan

- Revue des concepts matriciels
- La matrice d’adjacence
- La matrice de distance

La matrice de distance
Question 8

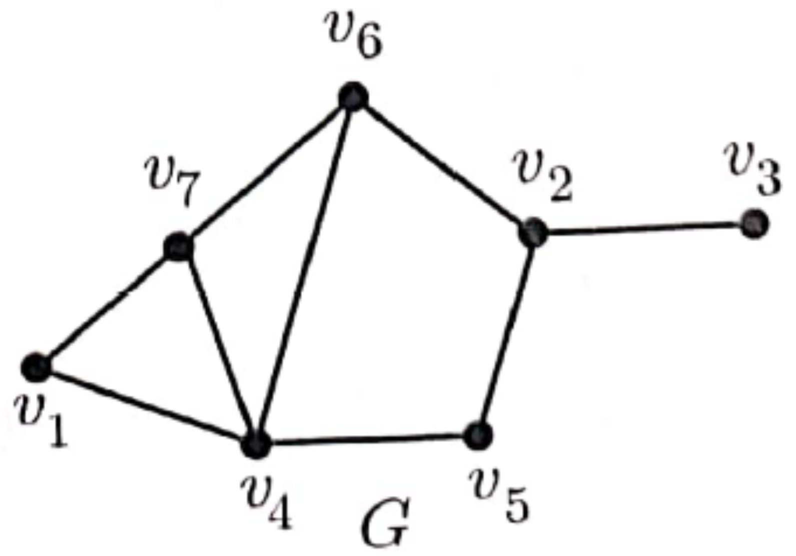
Trouvez la matrice de distance pour C_{2n} où les sommets sont étiquetés consécutivement v_1, v_2,…, v_{2n} en faisant le tour du cycle.

La matrice de distance Question 9

Trouvez la matrice de distance pour la roue $W_{1,n}$ où le sommet central de degré n est étiqueté v_1, et les sommets du cycle extérieur sont étiquetés consécutivement v_2,…, v_{n+1} au fur et à mesure que vous faites le tour du cycle .

La matrice de distance
Question 10

Écrire la matrice de distance D pour le graphe G.



La matrice de distance
Question 11

Sans dessiner le graphe, déterminez: l'ordre, l'excentricité de v_2 et v_5, le rayon, le diamètre et le centre.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de distance
Question 12

Construire un graphe G dont la matrice de distance est D.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de distance
Question 13

Considérez n'importe quel K_n, calculer ses matrices de distance et d'adjacence. Déduire.

La matrice de distance
Question 14

Montrer que la matrice suivante D ne peut pas être la matrice de distance d'un graphe si les arêtes ne sont pas pondérées; autrement dit, si chaque arête a une longueur de 1.

Quelle propriété de base d'une fonction de distance échoue et où échoue-t-elle?

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$