Théorie des Graphes

Université Libanaise

Faculté des Sciences

License Informatique

2ème année – S3

Syllabus

1. Concepts introductifs
2. Introduction aux graphes et à leurs utilisations
3. Arbres et graphes bipartis
4. Distance et connexité
5. Matrices
6. Algorithmes sur les graphes
7. Graphes Eulériens et Hamiltoniens
8. Coloration des graphes
9. Graphes planaires
10. Digraphes et réseaux

Matrices

Semaine 5

Avant de commencer

- Assurez-vous de faire la partie «Revue des concepts matriciels» par vous-même avant de continuer.

- La théorie des graphes utilise efficacement les matrices.

Plan

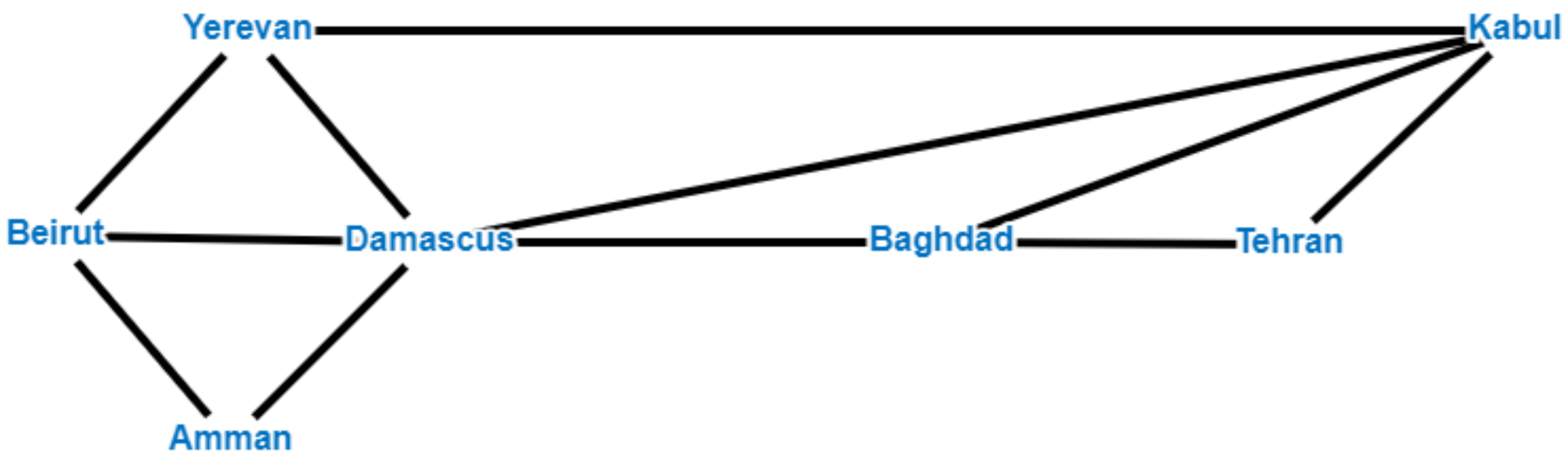
- Revue des concepts matriciels
- La matrice d’adjacence
- La matrice de distance

La matrice d’adjacence

- De nombreux algorithmes informatiques utilisent des graphes.
- Pour utiliser ces algorithmes, nous avons besoin d'un moyen pratique de stocker et de manipuler des graphes dans l'ordinateur.
- Il existe différentes manières de stocker des graphes, dont certaines sont plus efficaces que d'autres.
- Nous considérons maintenant l'une des manières les plus simples de stocker un graphe, c'est-à-dire sous forme de matrice.

La matrice d'adjacence
Un exemple simple

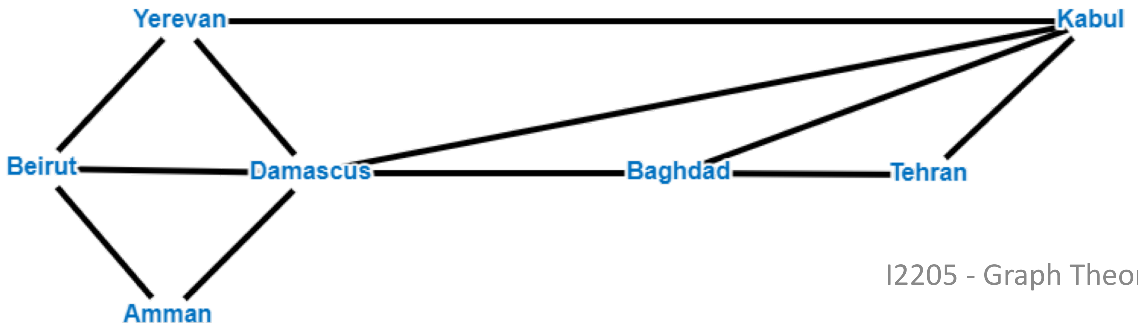
- Considérez la carte des compagnies aériennes. Deux villes sur la carte sont adjacentes s'il y a un vol (direct) les reliant.
- Sinon, les villes ne sont pas adjacentes.



La matrice d'adjacence
Un exemple simple

- Numérotons ces villes par ordre alphabétique.
  Donc les numéros Amman 1, Baghdad 2, Beirut 3, Damascus 4, Kabul 5, Tehran 6 et Yerevan 7.
- Nous allons créer une matrice 7×7, A, en définissant ses entrées comme suit:

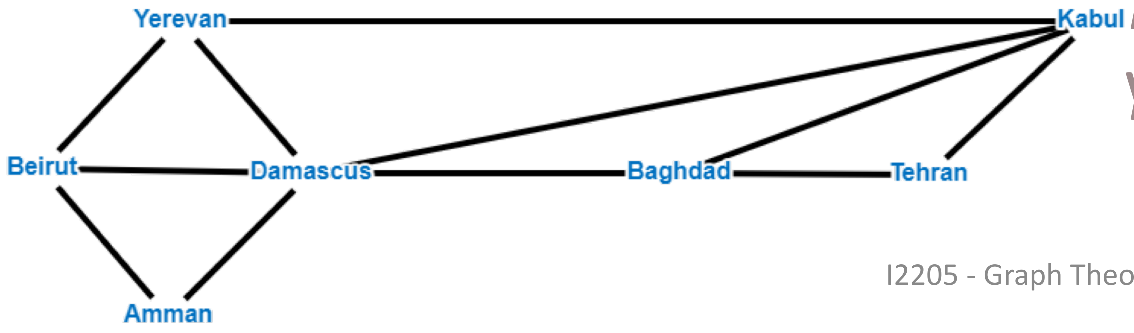
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si les villes } i \text{ et } j \text{ sont adjacentes} \\ 0 \text{ si les villes } i \text{ et } j \text{ ne sont pas adjacentes} \end{cases}$$



La matrice d'adjacence
Un exemple simple

- En utilisant ces informations, nous obtenons

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{ccccccc} \textit{Amman} & \textit{Baghdad} & \textit{Beirut} & \textit{Damascus} & \textit{Kabul} & \textit{Tehran} & \textit{Yerevan} \end{array} \\
\begin{array}{l} \textit{Amman} \\ \textit{Baghdad} \\ \textit{Beirut} \\ \textit{Damascus} \\ \textit{Kabul} \\ \textit{Tehran} \\ \textit{Yerevan} \end{array} &
A = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



La matrice d'adjacence
Un exemple simple

- La matrice A est un exemple de **matrice binaire**, puisque chaque entrée est un élément de l'ensemble {0,1}. Cette matrice importante, qui nous indique les contiguïtés de la carte aérienne, est une **matrice d'adjacence**.
- Notez que les entrées diagonales sont nulles, ce qui indique que les vols vont entre des villes distinctes.
- Observez également qu'une matrice de d'adjacence est **symétrique**.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice d'adjacence
Un exemple simple

- Si nous mettons au carré la matrice de d'adjacence A, nous obtenons:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

qui n'est plus une matrice binaire.

La matrice d'adjacence
Un exemple simple

- <u>Que signifie l'entrée (i, j) de cette matrice?</u>
- La réponse compte le nombre de 1 correspondants dans ces lignes.
- Cela signifie que s'il y a un 1 à la troisième place, disons, des deux lignes, il contribuera un 1 à la somme des produits. Si l'une des troisièmes entrées (ou les deux) est nulle, il n'y aura pas de contribution à partir de la troisième place.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La matrice d'adjacence
Un exemple simple

- Que signifie l'entrée (i, j) de cette matrice?
- En d'autres termes, le produit des lignes i et j donne le nombre de villes adjacentes à la fois à la ville i et à la ville j.
- Alors, l'entrée (i, j) de A^2 compte le nombre de trajets pour aller de ville i à ville j en exactement deux vols - à savoir, les vols qui impliquent un arrêt à une adjacence commune.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La matrice d’adjacence
Un exemple simple

- Il est intéressant d'observer que l'entrée diagonale de A^2, compte le nombre de villes adjacentes à la ville i. C'est la même chose que la somme des entrées de la ligne i de A.
  Le nombre de voyages, impliquant un seul arrêt, d'une ville à elle-même implique un vol vers une ville voisine puis un vol de retour; c'est-à-dire un aller-retour. L'entrée (4, 4) de A^2, par exemple, est 5, indiquant que Damas a des vols vers cinq villes. C'est aussi la somme des entrées de la quatrième ligne de A - la ligne correspondant à Damas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La matrice d'adjacence
Un exemple simple

- Il est plus difficile de montrer que A^3 compte le nombre de trajets de ville i à ville j comportant deux arrêts; c'est-à-dire impliquant trois vols.
  Plus généralement, l'entrée (i, j) de A^k compte le nombre de voyages de ville i à ville j impliquant k vols.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 8 & 7 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 8 & 4 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 7 & 8 & 10 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 4 & 9 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 7 & 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

La matrice d’adjacence d’un graphe

- Étant donné un graphe G d'ordre n, avec $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, on définit la $n \times n$ **matrice d’adjacence** A comme suit:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } v_i v_j \in E(G) \\ 0 \text{ si } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

- Notez que $a_{ii} = 0$, pour $i = 1,2, \dots, n$.
- De plus, puisque $a_{ij} = a_{ji}$, il s'ensuit que $A^t = A$, c'est-à-dire que A est une matrice binaire symétrique avec des zéros sur la diagonale.

La matrice d’adjacence d’un graphe

- On note J la matrice $n \times n$ avec toutes les entrées égales à 1.
- Ceci nous permet d'écrire la matrice d’adjacence de $\bar{G}$ comme $J - A - I$.
  Soustraire A de J change chaque 0 de A en un 1 et chaque 1 en un 0. C'est une bonne chose car les adjacences et les non-adjacences sont inversées en passant de G à $\bar{G}$.
- Qu'en est-il des entrées diagonales?
  Nous voulons qu'ils soient nuls dans la matrice d’adjacence de $\bar{G}$, ce qui nécessite de soustraire I de $J - A$.

La matrice d’adjacence d’un graphe

- L'entrée (i, j) de A^k compte le nombre de chaînes $v_i - v_j$ de longueur k dans G.

- $(A^2)_{ii}$, pour compter les chaînes de longueur 2 de v_i à lui-même, il faut visiter un voisin et revenir tout de suite.
  En symboles, nous avons $(A^2)_{ii} = \deg(v_i)$.

La matrice d’adjacence d’un graphe

- Une chaîne de longueur 3 de v_ià elle-même nécessite deux voisins adjacents, disons v_j et v_k, ce qui signifie qu'il y aura 2 de telles chaînes pour chaque triangle (le mot commun pour K_3) auquel appartient v_i.
  - L'une de ces chaînes va dans le sens des aiguilles d'une montre et l'autre dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour du triangle avec les sommets v_i, v_j et v_k seront alors comptés deux fois dans chacune des entrées diagonales de A^3 correspondant à ces trois sommets, portant le total à six.
  - Cela donne un beau théorème, dans lequel nous utilisons le terme **trace** pour désigner la somme des entrées diagonales.
- **Théorème**. Le nombre de triangles dans un graphe G est la trace de A^3 divisée par 6.

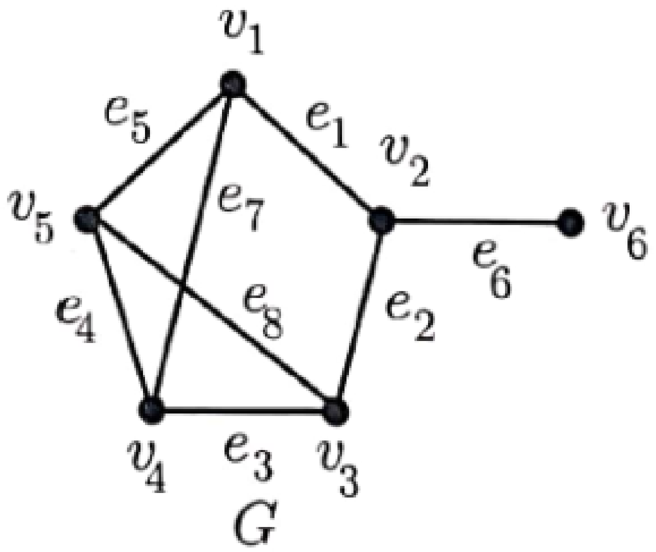
La matrice d'incidence

- Soit G un graphe ayant n sommets et m arêtes, tels que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. La **matrice d'incidence** de G est une matrice binaire M de dimension $n \times m$ où $m_{ij} = 1$ si v_i est incident avec e_i et $m_{ij} = 0$ sinon.

La matrice d'incidence

Exercice

Trouvez la matrice d'incidence pour le graphe étiqueté suivant



Le graphe a 6 sommets et 8 arêtes. Sa matrice d'incidence 6 x 8!

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice d'incidence

- Notez que la somme des entrées de la ligne i de M est $\deg(v_i)$. Ceci est également vrai, bien entendu, pour la matrice d'adjacence. De plus, la somme des entrées dans chaque colonne de M est de 2, car chaque arête est incidente avec exactement deux sommets.
- Voici une relation intéressante entre M et A. Soit D une matrice diagonale $n \times n$ (toutes les entrées non diagonales sont 0) telles que $d_{ii} = \deg(v_i)$.
  Théorème. Soit un graphe G avec $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ et $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, alors pour la matrice d'adjacence A, la matrice d'incidence M et la matrice diagonale D, où $d_{ii} = \deg(v_i)$, on a $MM^t = A + D$.

La matrice d'incidence

- Il doit être clair que M et A déterminent le graphe. En d'autres termes, si nous connaissons la matrice M ou la matrice A, nous pouvons dessiner le graphe.
  Malheureusement, il n'en va pas de même en sens inverse.
  Le graphe G peut avoir une multitude de matrices d'adjacence car on peut permuter les indices des sommets.
  Dans le cas de M, on peut également permuter les indices des arêtes.

Les matrices d'adjacence des classes de graphes

- Certaines classes de graphes sont facilement reconnaissables à partir de leurs matrices d’adjacence si (et c'est un gros si) l'étiquetage est conforme à une méthode spécifiée.
- Maintenant que les entrées immédiatement au-dessus et en dessous de la diagonale sont des 1, tandis que toutes les autres entrées sont des 0. Dit avec élégance, $a_{ij} = 1$ si et seulement si $|i - j| = 1$. Ainsi, les chemins étiquetés consécutivement sont facilement reconnus à partir de la matrice d'adjacence.

Considérons la matrice d'adjacence A pour le chemin P_5 avec des sommets étiquetés consécutivement.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices d'adjacence des classes de graphes

- Vous avez peut-être remarqué une connexion entre les matrices A et B.
- Ce dernier a deux 1 supplémentaires: l'entrée (1,5) et l'entrée (5, 1).
- Bien sûr! Un cycle peut être obtenu à partir d'un chemin en rendant les premier et dernier sommets adjacents.

- Un graphe qui peut être reconnu à partir de sa matrice d'adjacence est K_n. Peu importe comment les sommets de K_n sont étiquetés, $A(K_n) = J - I$. Ainsi, il y a des zéros sur la diagonale et des uns partout ailleurs.

Et les cycles? Considérons la matrice d'adjacence pour le cycle C_5 avec des sommets étiquetés consécutivement.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sous-matrices et blocs matriciels

- Une **sous-matrice** B d'une matrice $m \times n$ donnée M est une matrice $r \times s$, où $r \leq m$ et $s \leq n$, obtenue en retenant r lignes (partielles) et s colonnes (partielles) de M.
  Les lignes et colonnes retenues sont évidemment raccourcies aux entrées s et r, respectivement.
- Vous pouvez penser à la sous-matrice B comme étant constituée des entrées là où les r lignes spécifiques coupent les s colonnes sélectionnées de M.
- Une sous-matrice est appelée un **bloc** de la matrice d'origine lorsque les lignes r et les colonnes s sont consécutives. Si toutes les entrées d'un bloc sont égales à 0, nous pouvons écrire un grand 0 (il en va de même pour 1).

$$\left[\begin{array}{cc} \text{\Huge 0} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 8 \\ 3 & 7 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 2 & 9 \\ 5 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \end{matrix} & \text{\Huge 1} \end{array}\right]$$

Sous-matrices et blocs matriciels

- Étant donné le graphe biparti G avec m sommets rouges et n bleus et tel que les sommets rouges sont étiquetés v_1 à v_m et les sommets bleus sont étiquetés v_{m+1} à v_{m+n}, la matrice d'adjacence A sera constituée de quatre blocs.
- Les blocs supérieur gauche et inférieur droit seront des blocs nuls de dimensions $m \times m$ et $n \times n$ respectivement. En effet, les sommets de la même couleur dans un graphe biparti ne sont pas adjacents.
- Le bloc supérieur droit, appelé B, est une sous-matrice $m \times n$ qui contient suffisamment d'informations pour dessiner le graphe entier!
- Le bloc inférieur gauche est B^t, puisque A est symétrique.

Sous-matrices et blocs matriciels

Exercise

Trouvez la matrice d'adjacence pour C_8

C_8 est bipartie. Si nous étiquetons les sommets rouges 1,2,3,4 et les sommets bleus 5,6, 7,8

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sous-matrices et blocs matriciels

- Pour les graphes bipartis complets importants $K_{n,n}$ et $K_{1,n}$, les matrices d'adjacence, avec un étiquetage de sommet approprié, ont les formes suivantes, où chaque sous-matrice J est la matrice $n \times n$ contenant que des 1.

$$A(K_{n,n}) = \begin{bmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{bmatrix}$$

- Dans $A(K_{1,n})$, le bloc supérieur droit est une matrice $1 \times n$ de zéros, et le bloc inférieur gauche est un bloc $n \times 1$ de uns, le bloc inférieur droit est une matrice $n \times n$ de zéros.

$$A(K_{1,n}) = \begin{bmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{bmatrix}$$

Sous-matrices et blocs matriciels

- Soit G un graphe non connexe avec deux composantes H et K d'ordres r et s, respectivement.
  Étiquetez les sommets de la premiere composante v_1 à v_r et ceux de la deuxième composante v_{r+1} à v_{r+s}.
  Soit les matrices d'adjacence de H et K respectivement B et C.
- Alors la matrice d'adjacence du graphe G est donnée par

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

  où B est $r \times r$, C est $s \times s$, le bloc 0 supérieur droit est $r \times s$ et le bloc 0 inférieur est $s \times r$.

Plan

- Revue des concepts matriciels
- La matrice d’adjacence
- La matrice de distance

La matrice de distance

- Nous considérons maintenant une autre matrice, la **matrice de distance**, qui stocke la distance entre les sommets plutôt que les adjacences ou les incidences avec des arêtes.
- Nous verrons que la matrice de distance peut être générée avec un algorithme qui utilise la matrice d’adjacence.

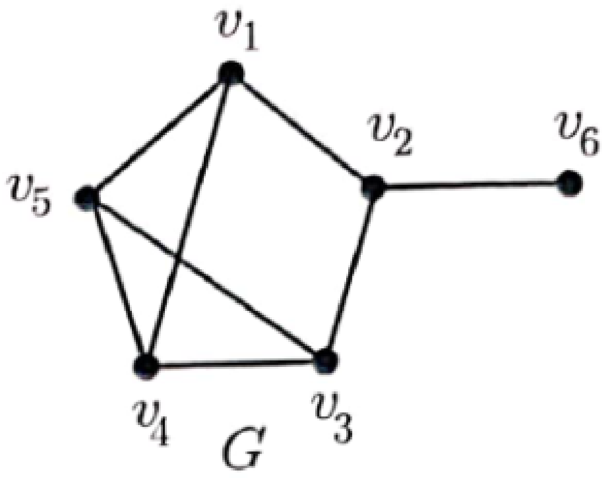
Un exemple simple

- Étant donné un graphe G d'ordre n, avec $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, on définit la $n \times n$ matrice de distance D comme la matrice avec $d_{ij} = d(v_i, v_j)$.
- Notez que $d_{ii} = 0$, pour i = 1,2,…, n.
- De plus, puisque la fonction de distance est une métrique, $d\left(v_i, v_j\right) = d(v_j, v_i)$, donc $d_{ij} = d_{ji}$.
- Il s'ensuit que $D^t = D$; c'est-à-dire que D est une matrice symétrique avec des zéros sur la diagonale.
- Notez, cependant, que contrairement à la matrice d'adjacence, la matrice de distance d'un graphe n'est généralement pas binaire.

La matrice de distance

- Écrire la matrice de distance pour le graphe suivant

Exercice



$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

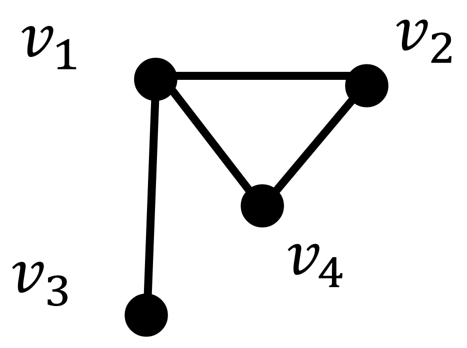
Obtenir D de A

- Notons S_k, la somme $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. ($S_k = \sum_{i=0}^{k} A^i$)
- Notez qu'une entrée non nulle (i, j) dans A^r, pour certains r tels que 0 ≤ r ≤ k, garantit que $(S_k)_{ij} \neq 0$.
- Rappelez-vous que $A^0 = I$.
- En fait, $(S_k)_{ij} \neq 0$ si et seulement si $(A^r)_{ij} \neq 0$ pour certains r satisfaisant 0 ≤ r ≤ k.
- Cette observation nous donne plusieurs algorithmes passionnants (facilement implémentés avec un programme informatique) pour déterminer divers faits sur G.
- Rappelons que $e(v)$ est l'excentricité de v.

Obtenir D de A

- **Théorème**. Si G est un graphe avec l'ensemble de sommets $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ et la matrice d'adjacence A, alors $e(v_i)$ est la valeur minimale de k telle que la ligne i de S_k n'a pas d'entrées nulles.

Exemple



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e(v_1) = 1$$

$$S_2 = I + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} e(v_2) = 2 \\ e(v_3) = 2 \\ e(v_4) = 2 \end{array}$$

Obtenir D de A

Il est à noter qu'il est possible que S_k, n'ait jamais une ligne sans aucune entrée nulle.

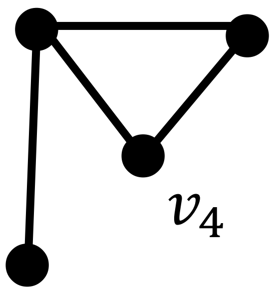
- Quand cela peut-il arriver?
  Lorsque G est non connexe ! Dans ce cas, quel que soit le sommet v_i que nous considérons, il y a toujours un sommet v_j pour lequel il n'y a pas de chaîne $v_i - v_j$ de longueur quelconque. Ainsi, l'entrée (i, j) de A^k sera 0 pour tout k, de même que l'entrée (i, j) de S_k.
- Comment savons-nous quand nous arrêter; c'est-à-dire, comment savons-nous que G est non connexe si nous n'avons pas un dessin de G mais seulement sa représentation matricielle A?
  - Puisqu'un chemin le plus court est une chaîne et que le diamètre d'un graphe connexe à n sommets est au plus $n - 1$, et A^{n-1} listera le nombre de chaînes de longueur $n - 1$ dans G, on a le résultat simple suivant.
- **Théorème** Un graphe G sur n sommets est connexe si et seulement si S_{n-1} n'a pas d'entrées nulles.

Obtenir D de A

- Nous allons maintenant restreindre notre attention aux graphes connexes, où les distances sont toutes finies. Nous sommes maintenant équipés pour déterminer $rad(G)$.

- **Théorème** Pour tout graphe connexe G, $rad\ (G)$ est le minimum k tel qu'au moins une ligne de S_k n'a pas d'entrées nulles.

Exemple



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e(v_1) = 1 \quad \color{red}{rad(G) = 1}$$

$$S_2 = I + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

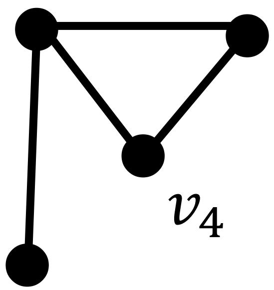
$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$e(v_2) = 2$
$e(v_3) = 2$
$e(v_4) = 2$

Obtenir D de A

- Pour déterminer le centre C (G): On évalue les sommes matricielles courantes S_m, pour m = 1,2,…, et on s'arrête dès que l'on atteint le plus petit d'un nombre k tel que S_k a au moins une ligne sans zéro entrées, ou bien nous atteignons m = n − 1.
- Dans le premier cas, les sommets correspondant aux lignes sans zéros constituent le centre de G.
- Dans le second cas, s'il y a des lignes sans zéros, les sommets correspondants constituent le centre de G.
- Si, cependant, il n'y a pas de telles lignes, alors le graphe est non connexe et le centre est constitué de $V(G)$.

Exemple



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$e(v_1) = 1$ $\quad$ $C(G) = \{v_1\}$

$$S_2 = I + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

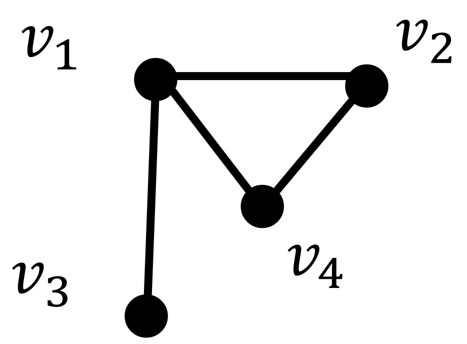
$e(v_2) = 2$
$e(v_3) = 2$
$e(v_4) = 2$

Obtenir D de A

- **Théorème** Si G est un graphe connexe, alors $diam(G)$ est le minimum k tel que S_k n'a pas d'entrées nulles.

- Notez que si G est non connexe, il n'y a pas de k tel que S_k n'a pas d'entrées nulles et le théorème ci-dessus nous alerterait de ce fait. Dans ce cas, nous avons $diam(G) = \infty$.

Exemple



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e(v_1) = 1$$

$$S_2 = I + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e(v_2) = 2$$
$$e(v_3) = 2$$
$$e(v_4) = 2$$

$$diam(G) = 2$$

Réalisabilité de la matrice de distance

- Un problème intéressant mais très difficile concernant les matrices de distance est le suivant: Étant donné une matrice symétrique D d'entiers non négatifs avec tous les zéros sur la diagonale. Est-ce que D est la matrice de distance d'un graphe?
- Tout d'abord pour s'assurer que la fonction de distance est une métrique, il faut vérifier que l'inégalité du triangle est vraie: c'est-à-dire $d(v_i, v_j) \leq d(v_i, v_k) + d(v_k, v_j)$ pour tout i, j, k.

Réalisabilité de la matrice de distance

Exercice

- Considérer la matrice suivante. Déterminer s'il s'agit de la matrice de distance d'un graphe G et si c'est le cas, trouvez le graphe G.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Réalisabilité de la matrice de distance

Solution

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si nous devions vérifier l'inégalité du triangle pour tous les triplets ordonnés possibles, nous devrions vérifier 6 * 5 * 4 = 120 égalités.

Cependant, comme D est symétrique, il est divisé par deux, il y a donc 60 inégalités à vérifier.

Encore trop!

Réalisabilité de la matrice de distance

v_3 est adjacent à la fois à v_4 et v_6 mais à la distance 2 de v_5

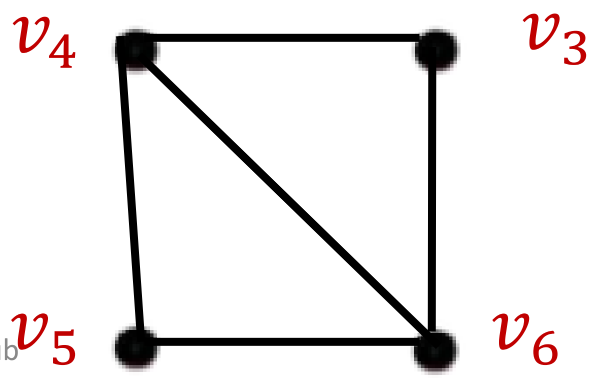
Solution

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

v_4, v_5 et v_6 sont mutuellement adjacents

Nous allons construire le graphe par étapes en recherchant des sous-graphes reconnaissables dans les blocs de la matrice de distance.

En particulier, si $d_{ij} = 1$, alors v_i et v_j sont adjacents.



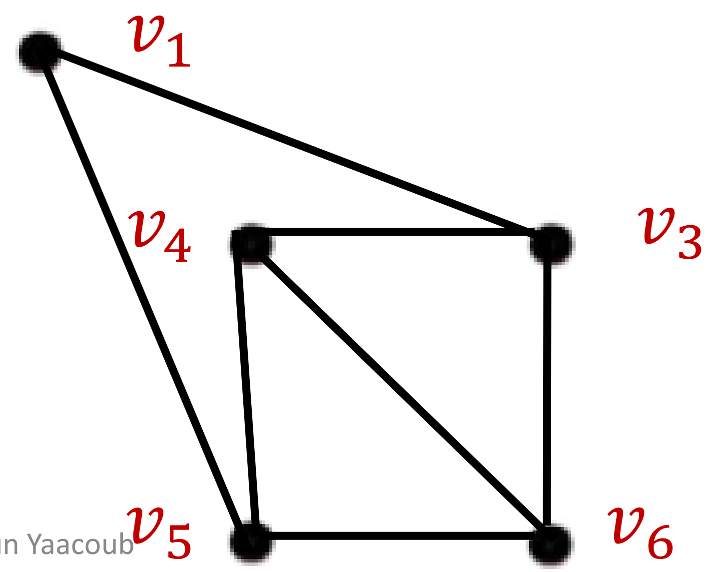
Réalisabilité de la matrice de distance

Solution

v_1 est adjacent à v_3 et v_5
mais à la distance 2 de v_2, v_4
et v_6

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Considérer v_1 car il y en a plus de 1 dans la ligne 1 que dans la ligne 2.

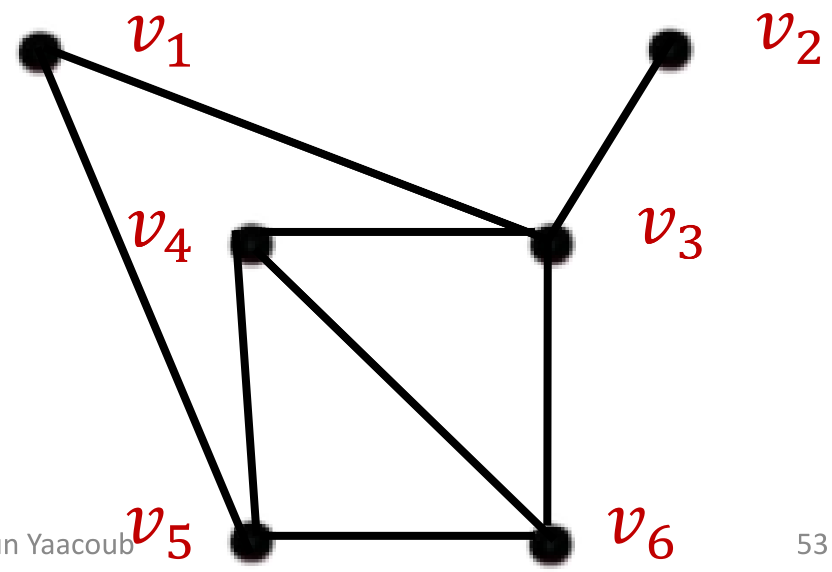


Réalisabilité de la matrice de distance

Solution

v_2 est adjacent à v_3
mais à la distance 2 de v_1, v_4 et v_6,
et à la distance 3 de v_5.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Réalisabilité de la matrice de distance

- Lorsque le nombre de sommets est petit et que nous recherchons un graphe G qui réalise une matrice de distance donnée D, le problème peut généralement être résolu dans un laps de temps raisonnable.
- Nous avons trouvé que la meilleure approche consiste à construire des sous-graphes plus grands induits successivement par étapes.
- Les problèmes de réalisabilité de la matrice de distance peuvent cependant être beaucoup plus difficiles, car dans les applications, nous recherchons souvent un graphe pondéré plutôt qu'un graphe.
- De plus, les poids sur les arêtes ne sont pas limités aux valeurs entières.