Théorie des Graphes

Université Libanaise
Faculté des Sciences

License Informatique

2ème année – S3

Syllabus

1. Concepts introductifs
2. Introduction aux graphes et à leurs utilisations
3. Arbres et graphes bipartis
4. Distance et connexité
5. Graphes Eulériens et Hamiltoniens
6. Coloration des graphes
7. Matrices
8. Algorithmes sur les graphes
9. Graphes planaires
10. Digraphes et réseaux

Distance et connexité

Semaine 4

Avant de commencer

- La distance est utilisée dans diverses opérations graphiques:
  - Test d'isomorphisme
  - Problèmes de convexité (relation avec la fiabilité et la vulnérabilité des réseaux informatiques)
  - …
- De nombreux algorithmes graphiques sont liés à la distance (recherche de chemins de différentes longueurs)

Plan

- Distance dans les graphes
- Concepts de connexité

Distance dans les graphes

- Étant donné 2 sommets, u et v, dans un graphe G, la **distance** entre eux, notée $d(u, v)$, est définie comme étant le nombre d'arêtes dans n'importe quelle géodésique $u - v$ dans G.
- La fonction de distance en théorie des graphes doit se comporter comme une fonction de distance (techniquement **métrique**) dans tous les domaines des mathématiques.

Distance dans les graphes

- Voici une liste des axiomes auxquels toutes les fonctions de distance obéissent:
  - $d(u, v) \geq 0$, et $d(u, v) = 0$ ssi $u = v$
  - $d(u, v)$= $d(v, u)$ pour tous u, v
  - $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ pour tous u, v, w (appelé **inégalité triangulaire**)

Distance dans les graphes
Excentricité, centre, rayon et diamètre

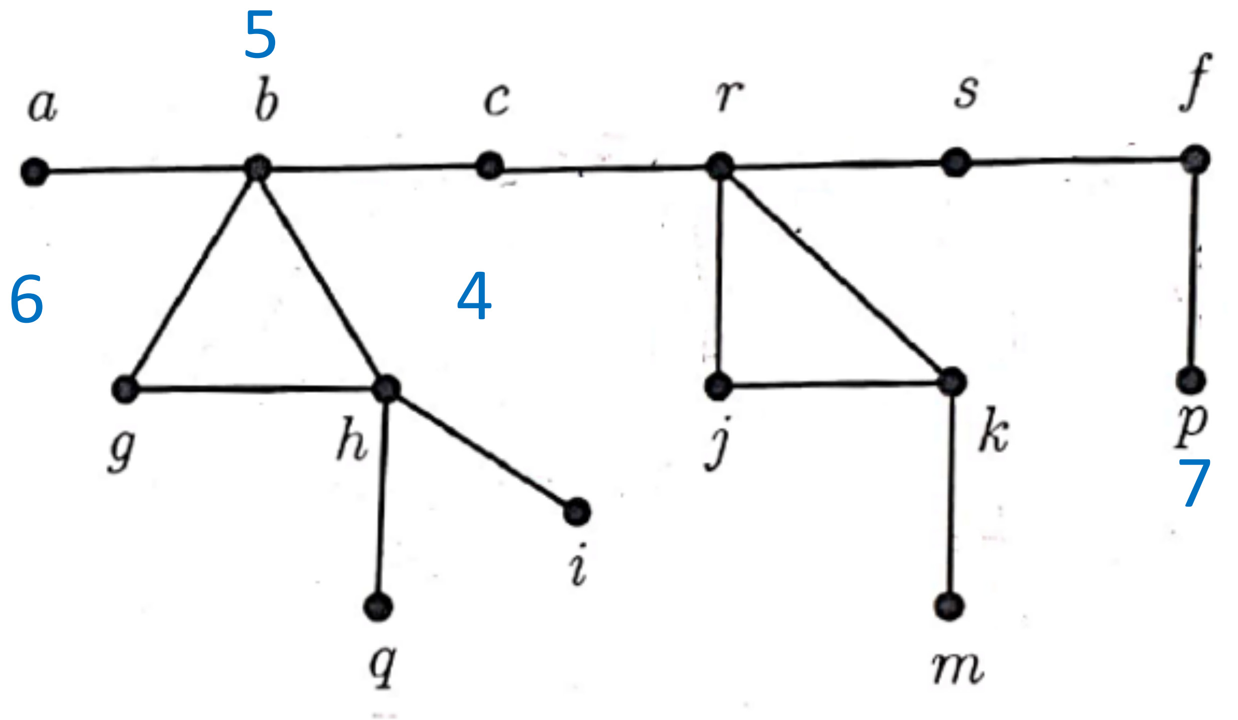
- Étant donné un sommet v d'un graphe G, l' **excentricité** de v, notée $\boldsymbol{e(v)}$, est la distance par rapport à un sommet le plus éloigné de v dans G.

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} d(u, v)$$

Distance dans les graphes
Excentricité, centre, rayon et diamètre

Exercice

Lister l'excentricité des sommets *a* , *b* , *c* et *p* dans le graphe suivant



Distance dans les graphes
Excentricité, centre, rayon et diamètre

- **Attention**
  Si $e(v) = t$ pour un sommet v d'un graphe G, alors

1. La distance de v à tout autre sommet n'est pas supérieure à t, et
2. Il y a au moins un sommet dont la distance de v est t.

Distance dans les graphes
Excentricité, centre, rayon et diamètre

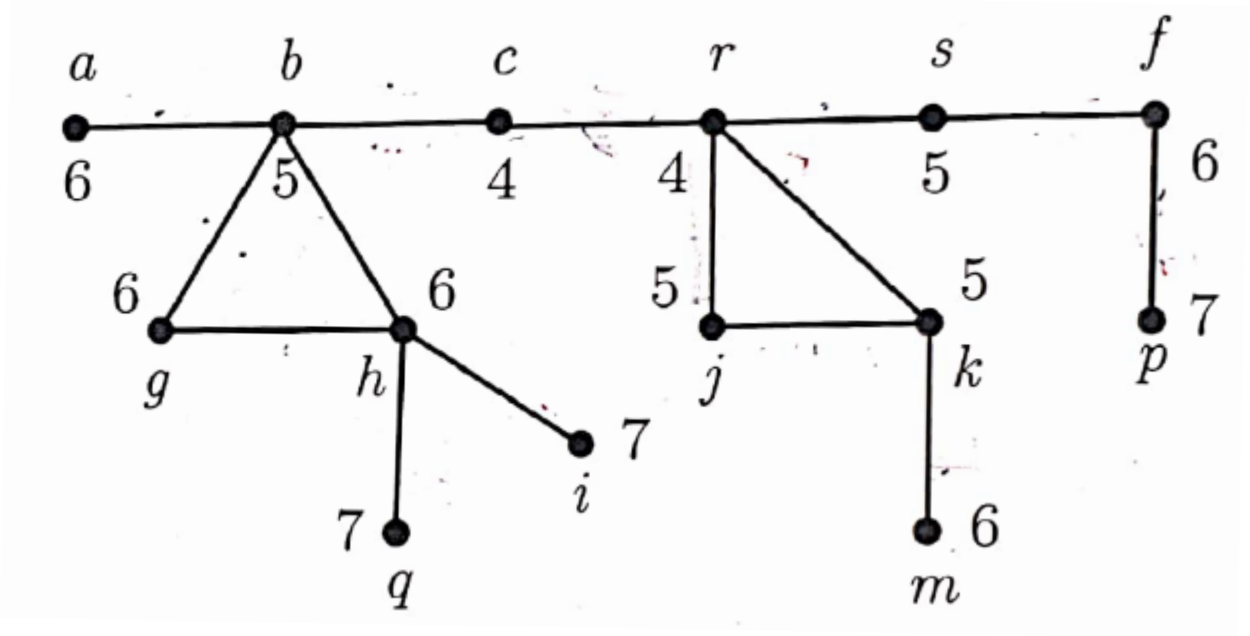
- Nous appelons un sommet, w, un **sommet excentrique** de v si $d(v, w) = e(v)$. (la relation réciproque n'est pas toujours vraie!)
- Une paire de sommets qui se trouvent être des sommets excentriques l'un de l'autre sont appelés **mutuellement excentriques**.

Distance dans les graphes
Excentricité, centre, rayon et diamètre

Exercice

Vérifiez que le sommet *j* n'est pas un sommet excentrique du sommet *i* et que le sommet *i* est un sommet excentrique de *j* .

Vérifiez que *p* et *q* sont mutuellement excentriques.



Distance dans les graphes
Excentricité, centre, rayon et diamètre

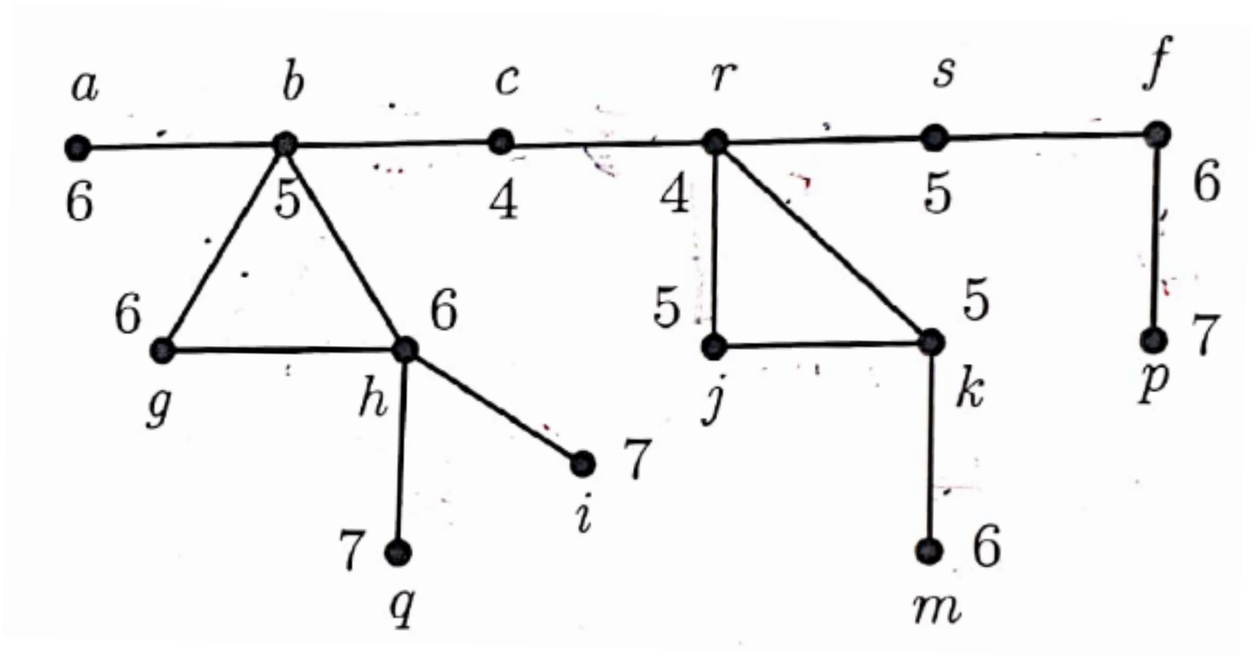
- L'excentricité minimale entre les sommets d'un graphe G est appelée le **rayon** de G, généralement abrégée $\boldsymbol{rad(G)}$.
- L'ensemble des sommets avec une excentricité minimale est appelé le **centre** , désigné par $\boldsymbol{C(G)}$.

Distance dans les graphes
Excentricité, centre, rayon et diamètre

Exercice

Quel est le rayon de ce graphe?

Donnez le centre.



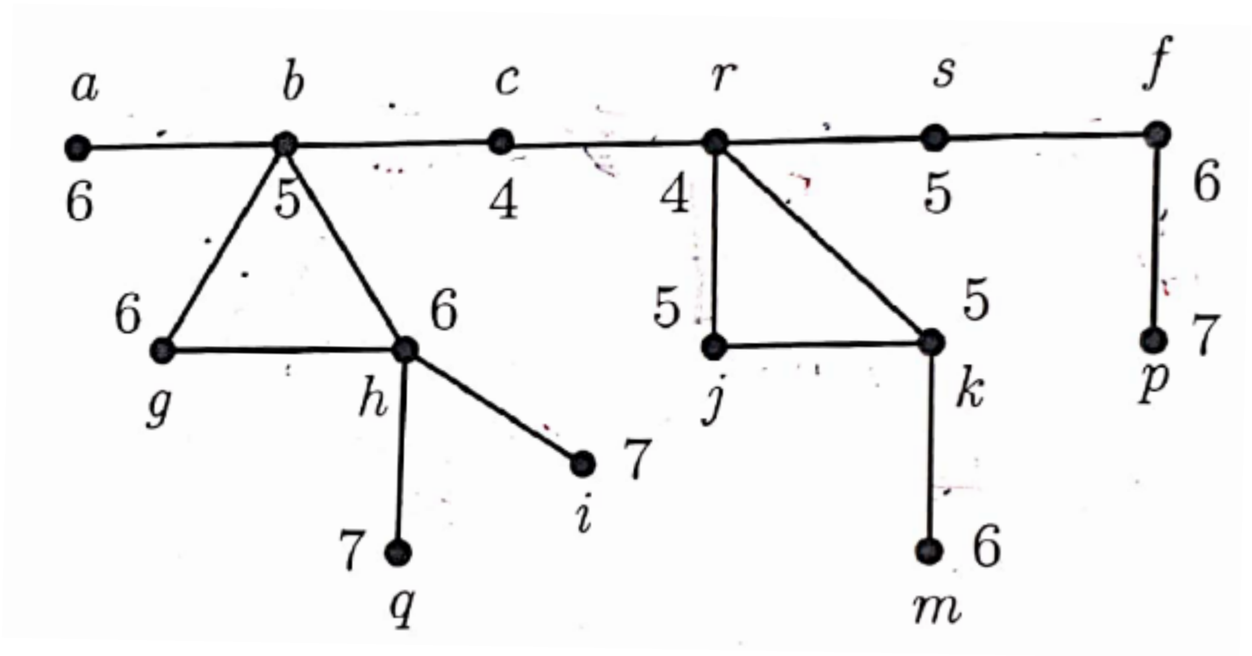
Distance dans les graphes
Excentricité, centre, rayon et diamètre

- La **périphérie** d'un graphe G, notée $\boldsymbol{P(G)}$, est l'ensemble des sommets avec une excentricité maximale.
- L'excentricité maximale est appelée le **diamètre** de G, désigné par $\boldsymbol{diam(G)}$.
- La périphérie d'un graphe non trivial doit contenir au moins une paire de sommets u et v satisfaisant $d(u, v) = diam(G)$.

Distance dans les graphes
Excentricité, centre, rayon et diamètre

Quel est le diamètre de ce graphe? Donnez la périphérie.

Exercice



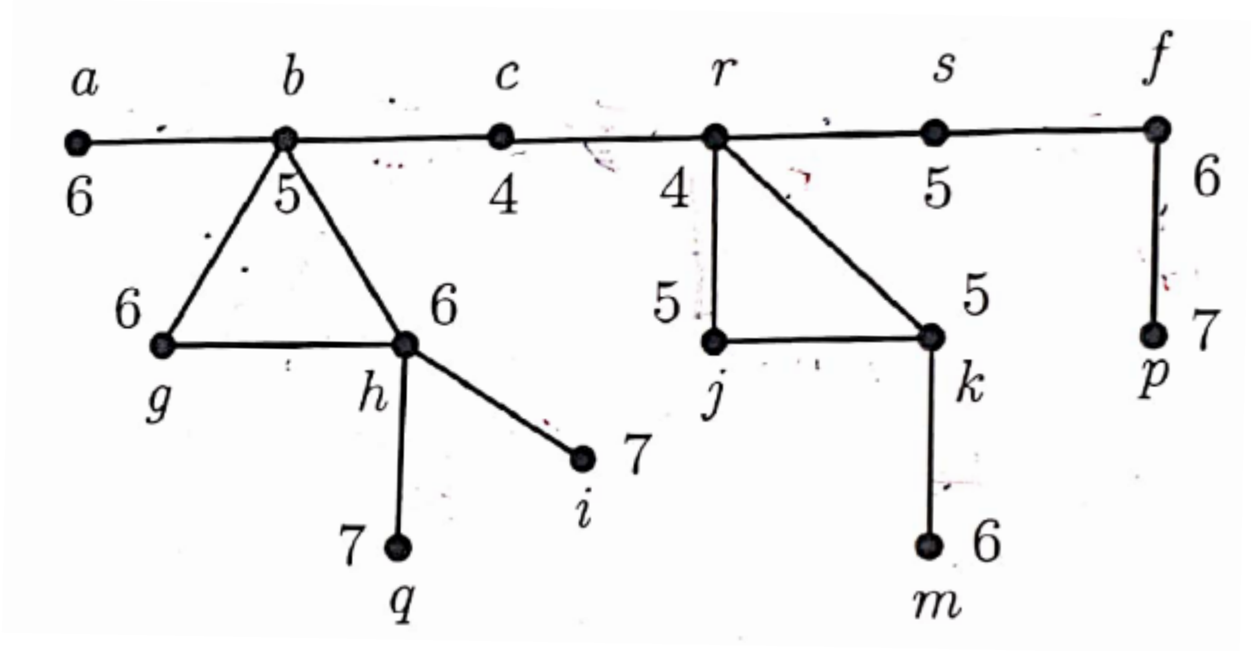
Distance dans les graphes
Excentricité, centre, rayon et diamètre

- La paire de sommets u et v satisfaisant $d(u,v) = diam(G)$ est appelée **antipodale** ou **diamétrale**. Chaque sommet est appelé **antipode** de l'autre.
- Les sommets antipodaux sont toujours mutuellement excentriques (l'inverse n'est pas vrai).
- Une géodésique [nécessairement de longueur $rad(G)$] joignant un sommet central à l'un de ses sommets excentriques est appelée une **trajectoire radiale** ou **chemin radiale**.
- Une géodésique [nécessairement de longueur $diam(G)$] joignant une paire diamétrale de sommets est appelée un **trajectoire diamétrale** ou **chemin diamétral**.

Distance dans les graphes
Excentricité, centre, rayon et diamètre

Donnez les 2 paires d'antipodes.

Exercice



Distance dans les graphes
Excentricité, centre, rayon et diamètre

- Si un graphe G est connexe, son diamètre est un entier non négatif.
- Si G est non connexe, son diamètre est défini comme étant ∞, c'est-à-dire $diam(G) = \infty$.

- **Théorème** . Si u et v sont des sommets adjacents dans un graphe connexe, alors $|e(u) - e(v)| \leq 1$.

Distance dans les graphes
Arbres et distance

Quelques propriétés de distance pour les arbres:

1. Étant donné 3 sommets u, v et w d'un arbre, tels que u et v sont adjacents, on a $|d(u, w) - d(w, v)| = 1$.
2. Tous les sommets excentriques sont des sommets d'extrémité.
3. Les paires de sommets antipodaux sont des sommets d'extrémité.
4. La périphérie est constituée de sommets d'extrémité.
5. Chaque chemin diamétral comprend tous les sommets centraux.

Distance dans les graphes
Centre d’un arbre

- **Théorème** . Le centre d'un arbre se compose soit d'un seul sommet ou de deux sommets adjacents.

- **Observation**. Pour tout graphe G, on a $rad(G) \leq diam(G) \leq 2 * rad(G)$.

- **Théorème**. Pour tout arbre T,
  si $|C(T)| = 1$, alors $diam(T) = 2 * rad(T)$, et
  si $|C(T)| = 2$, alors $diam(T) = 2 * rad(T) - 1$.

Distance dans les graphes
Graphes auto-complémentaires et distance

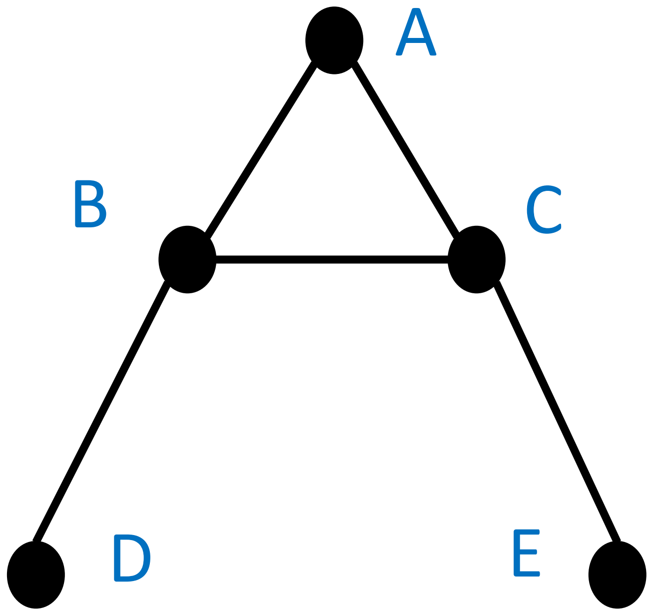
- **Théorème**. Si $diam(G) \geq 3$, alors $diam(\bar{G}) \leq 3$.
- **Corollaire**. Si G est auto-complémentaire, alors $diam(\bar{G}) \leq 3$.
- **Autrement dit**. Le diamètre d'un graphe non trivial et auto-complémentaire est de 2 ou 3.

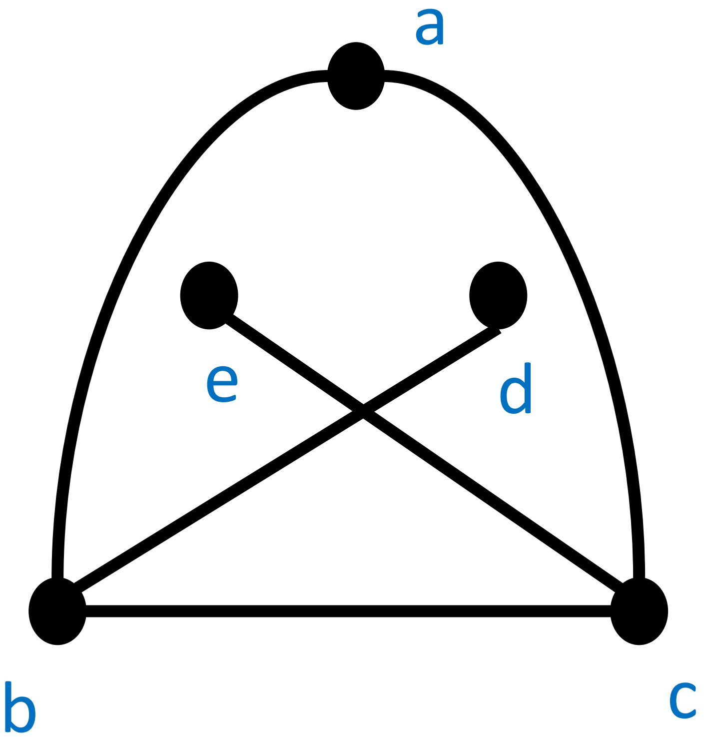
Distance dans les graphes
Graphes auto-complémentaires et distance

Exercice

Le graphe suivant est-il auto-complémentaire?

Si oui, indiquez son diamètre.





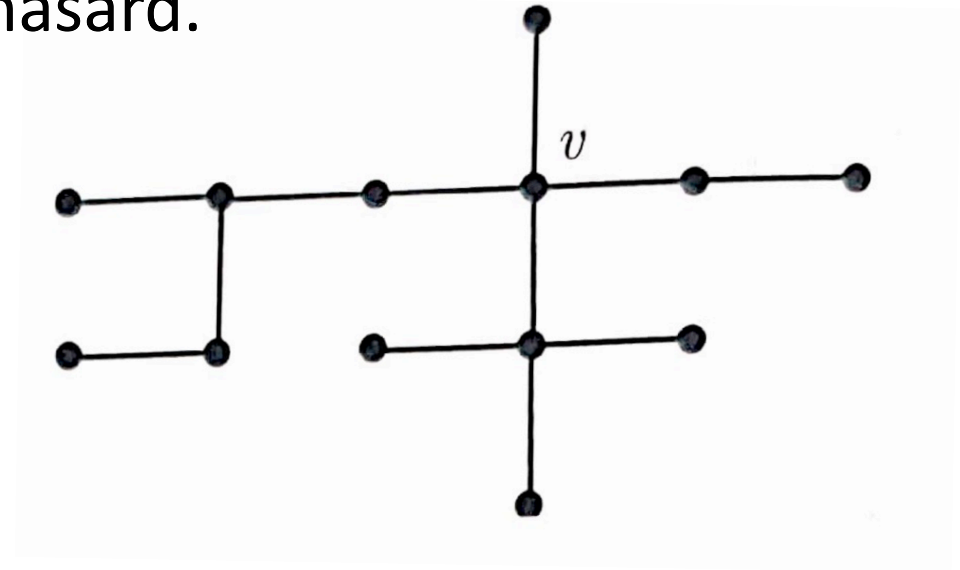
Distance dans les graphes
Le centroïde d'un arbre

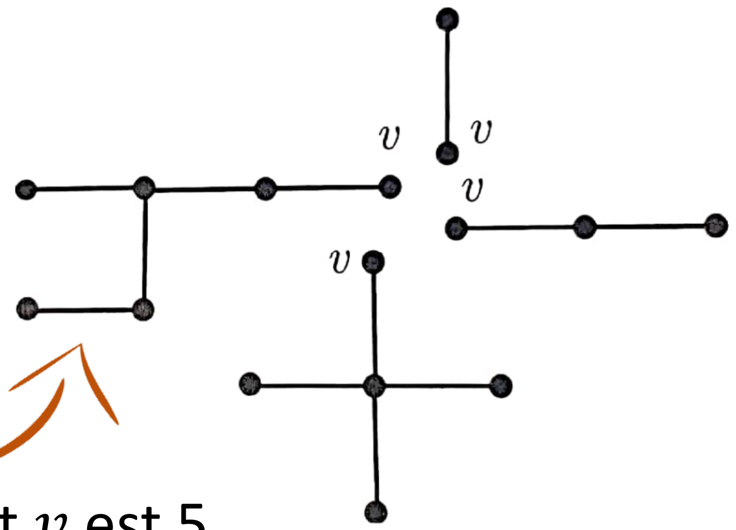
- Étant donné un sommet v d'un arbre T, les sous-arbres maximaux qui ont v comme sommet d'extrémité sont appelés **branches à v**.
- Le degré de v est égal au nombre de branches à v.
- Si v est un sommet d'extrémité, il n'y a qu'une seule branche avec un sommet d'extrémité v, à savoir, l'arbre entier.
- Le poids d'un sommet v est le plus grand nombre d'arêtes parmi toutes ses branches.

Distance dans les graphes
Le centroïde d'un arbre

Exemple

Un arbre T et les branches d'un sommet v sélectionné au hasard.





5 arêtes

poids du sommet v est 5

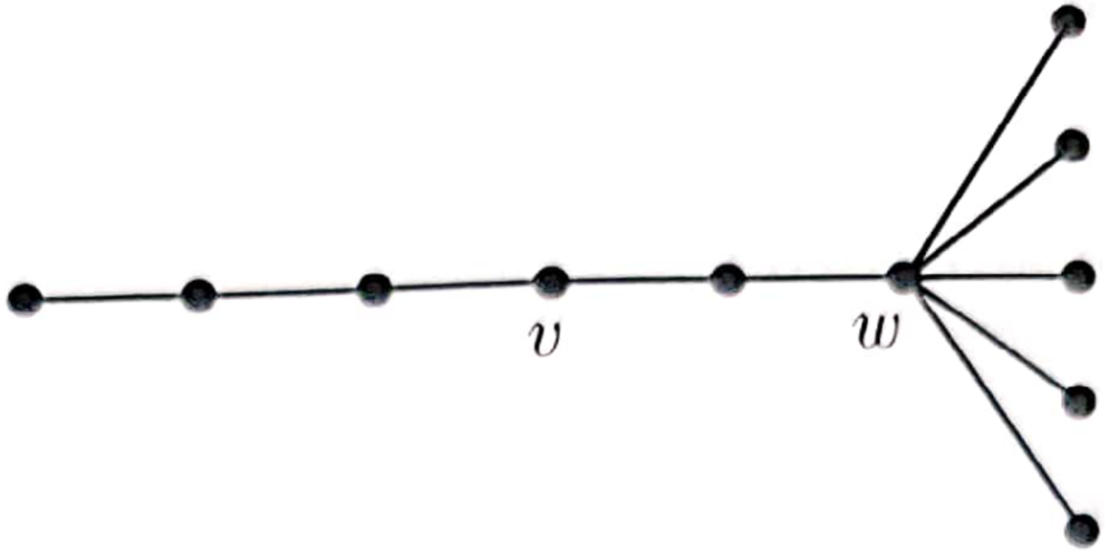
Distance dans les graphes
Le centroïde d'un arbre

- Le **centre de gravité** ou **centroïde** d'un arbre est l'ensemble des sommets avec un poids minimum.
- Le centroïde consiste soit en un seul sommet ou deux sommets adjacents.
- Le centre et le centroïde d'un arbre peuvent être disjoints.

Distance dans les graphes
Le centroïde d'un arbre

Lequel des sommets et est le centre / centroïde?

Exemple



Plan

- Distance dans les graphes
- Concepts de connexité

Concepts de connexité

- Dans certains graphes, la suppression d'un ou de plusieurs sommets divisera le graphe en plusieurs composantes.
- Dans un graphe non trivial, il est toujours possible de séparer un graphe en composantes disjointes en supprimant des arêtes.

Concepts de connexité
Points d'articulation, ponts, et connexité

- Un sommet dans un graphe connexe G est appelé un **point d'articulation (cut vertex)** si sa suppression rend le graphe non connexe.
- Si G est un graphe non connexe, nous définissons un point d'articulation comme un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes de G.
- Une arête uv est un **pont (bridge)** ou une **arête d'articulation (cut edge)** si sa suppression augmente le nombre de composantes.
- Dans un graphe connexe G, l'arête uv est un pont si $G - uv$ est non connexe.

Concepts de connexité
Points d'articulation, ponts, et connexité

- Alors que chaque arête d'un arbre est un pont, seuls les sommets qui ne sont pas des sommets d'extrémité sont des points d’articulations.
- v est un point d’articulation d'un arbre T ssi $deg(v) \geq 2$.

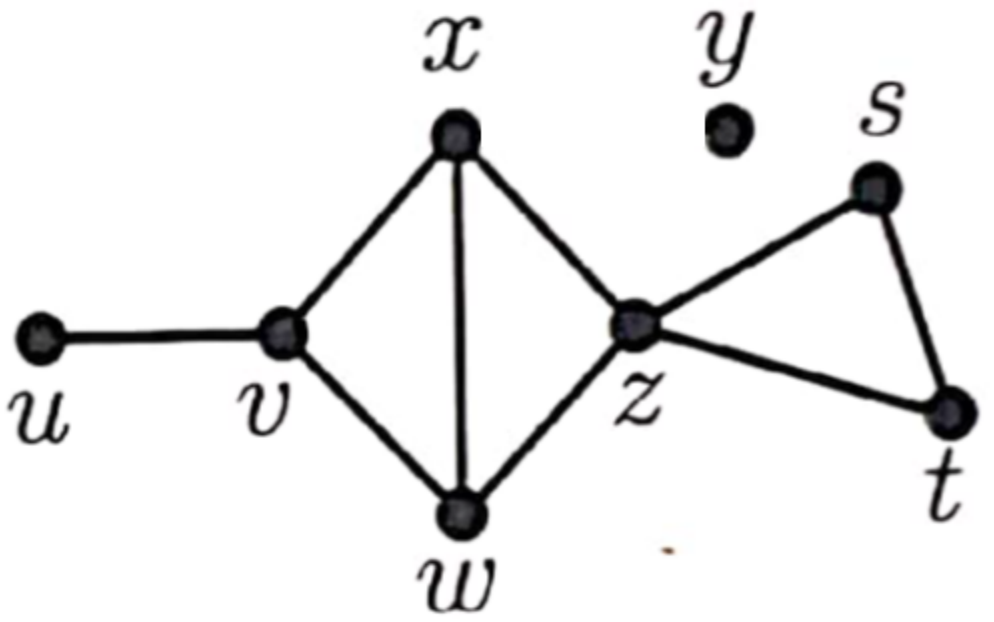
Question rapide

Combien de points d’articulation et combien de ponts y a-t-il dans $K_{1,n}$?

Concepts de connexité
Points d'articulation, ponts, et connexité

Exercice

Trouvez tous les points d'articulation et tous les ponts pour le graphe suivant.



Concepts de connexité
Points d'articulation, ponts, et connexité

- La **connexité des sommets** d'un graphe G, notée $\kappa(G)$, ou juste κ (prononcée *kappa*), est le nombre minimum de sommets dont la suppression rend le graphe G non connexe ou bien trivial.
- Si G est non connexe, alors $\kappa(G) = 0$.
- Un ensemble de sommets dans un graphe connexe dont la suppression rend le graphe non connexe est appelé une **coupe de sommets (vertex cutset)** ou bien un **ensemble séparateur d'un graphe**.
- Un graphe connexe G a un point d'articulation ssi $\kappa(G) = 1$.
- Un graphe est appelé $\boldsymbol{k-\mathbf{connexe}}$ pour un entier positif k si $\kappa(G) \geq k$.

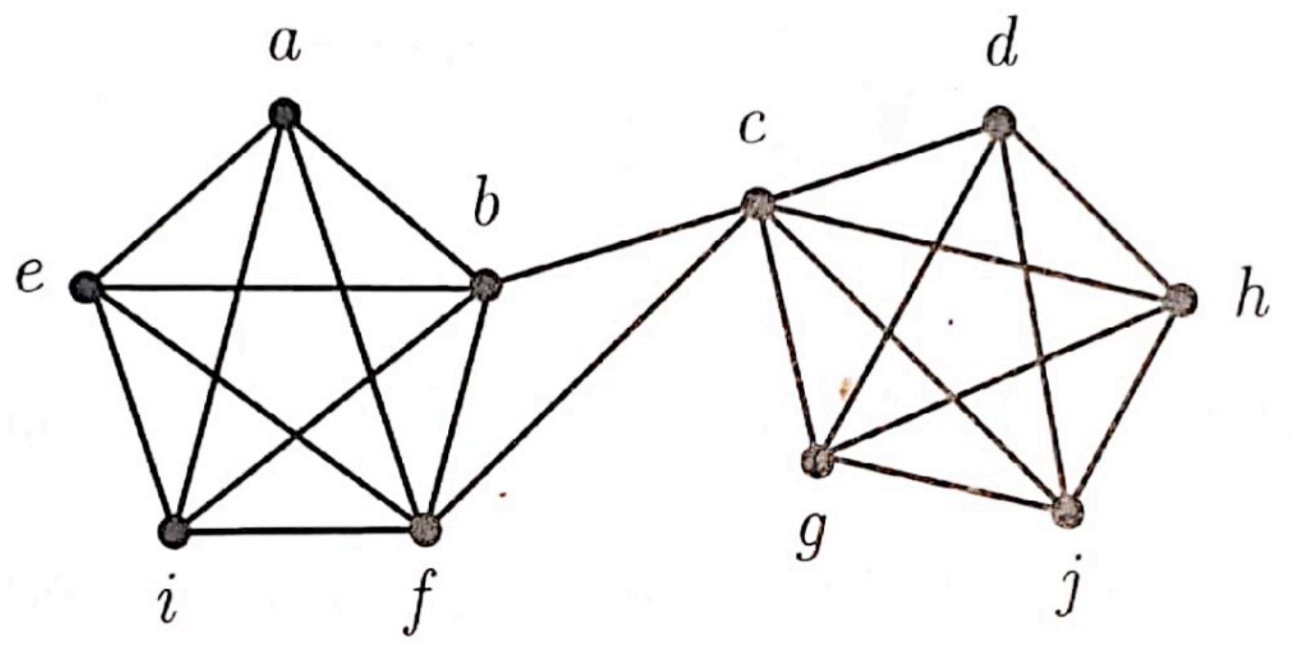
Concepts de connexité
Points d'articulation, ponts, et connexité

- La **connexité d'arête** d'un graphe G, notée$\lambda(G)$, ou simplement λ (prononcée *lambda*), est le nombre minimum d'arêtes dont la suppression rend le graphe G non connexe ou trivial.
- Un ensemble d'arêtes dans un graphe connexe dont la suppression rend le graphe non connexe est appelé un **séparateur** ou bien une **coupe** ou bien une **coupe d'arêtes (edge cutset)**.
- Un graphe connexe G a un pont ssi $\lambda(G) = 1$.

Concepts de connexité
Points d'articulation, ponts, et connexité

Trouver κ, λ et δ.

Exercice



Concepts de connexité
Points d'articulation, ponts, et connexité

- **Théorème** . Étant donné un graphe connexe, G, on a
$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

- Noter que $\kappa(C_n) = \lambda(C_n) = \delta(C_n) = 2$.

Question rapide
Est-il vrai que nous pouvons également obtenir l'égalité des chemins?
Quelle est la valeur pour P_1? pour P_n?

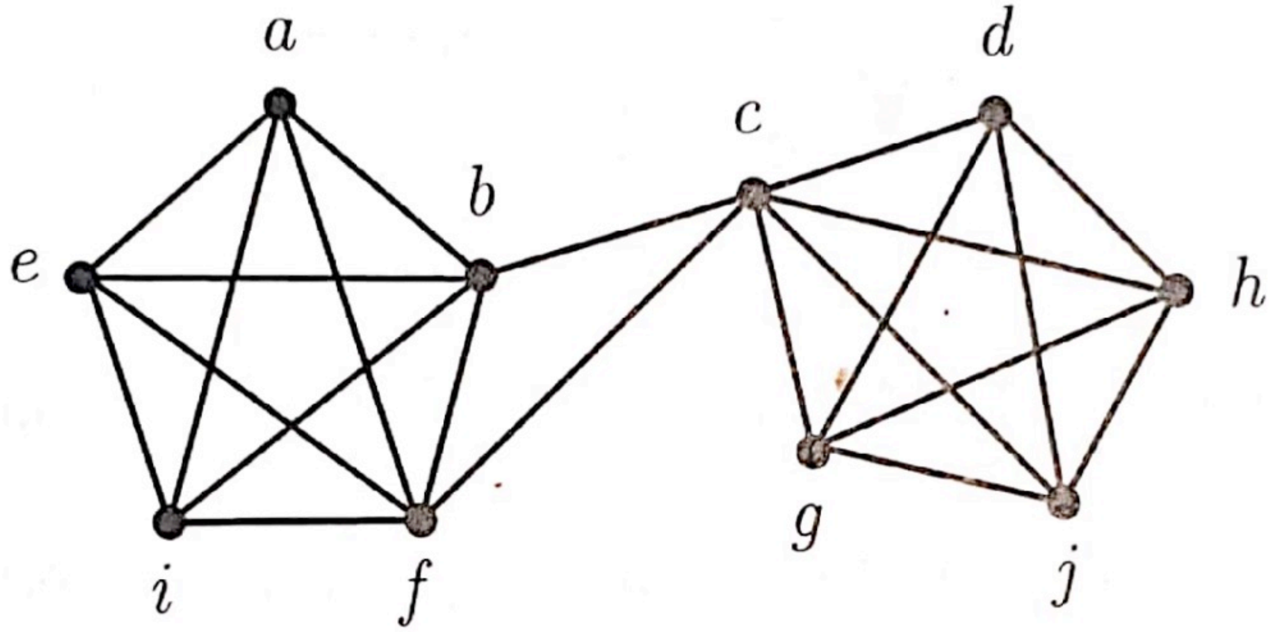
Question rapide
Est-il vrai que nous pouvons obtenir l'égalité pour tous les arbres non triviaux?

Concepts de connexité
Points d'articulation, ponts, et connexité

Exercice

Trouvez une coupe de sommets minimale d'ordre 1 et d'ordre 2.

Ensuite, trouvez une coupe minimale de taille 2.



Concepts de connexité
Théorème de *Menger*

- Deux chaines élémentaires connectant u et v sont **des chaines $\boldsymbol{u - v}$ disjointes en interne,** ou **disjointes** tout court, si elles n'ont pas de sommets en commun autres que u et v; elles sont **disjointes en arêtes** si elles n'ont pas d'arêtes en commun.
- Toutes les chaines disjointes sont nécessairement disjointes en arêtes.
- Un ensemble S de sommets, d'arêtes ou les deux, **sépare** u et v et si u et v sont dans des composantes différentes dans $G - S$. ($u, v \notin S$, et chaque chaine qui connecte u et v traverse S)

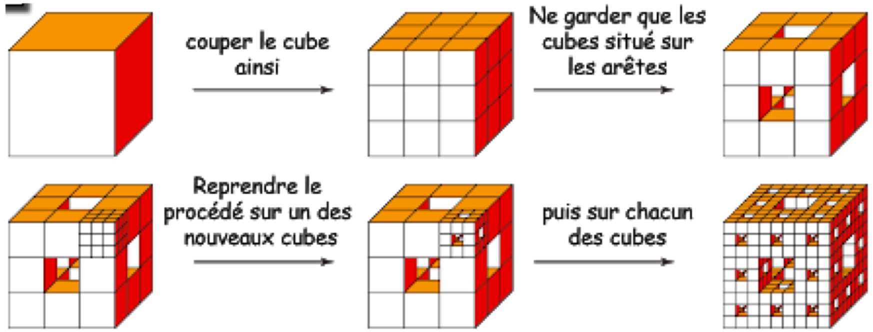
Concepts de connexité
Théorème de *Menger*

- **Théorème de Menger** . Soit u et v des sommets non adjacents distincts dans G.

  Alors, le nombre maximum de chaines élémentaires disjointes connectant u et v est égal au nombre minimum de sommets dans un ensemble qui sépare u et v.

Karl Menger

Karl Menger est un mathématicien autrichien (Autriche - Vienne) ayant travaillé dans le domaine de la géométrie, avec des contributions à la théorie des jeux et aux sciences sociales. On lui doit notamment l'*éponge de Menger*, et le *théorème de Menger* en théorie des graphes.

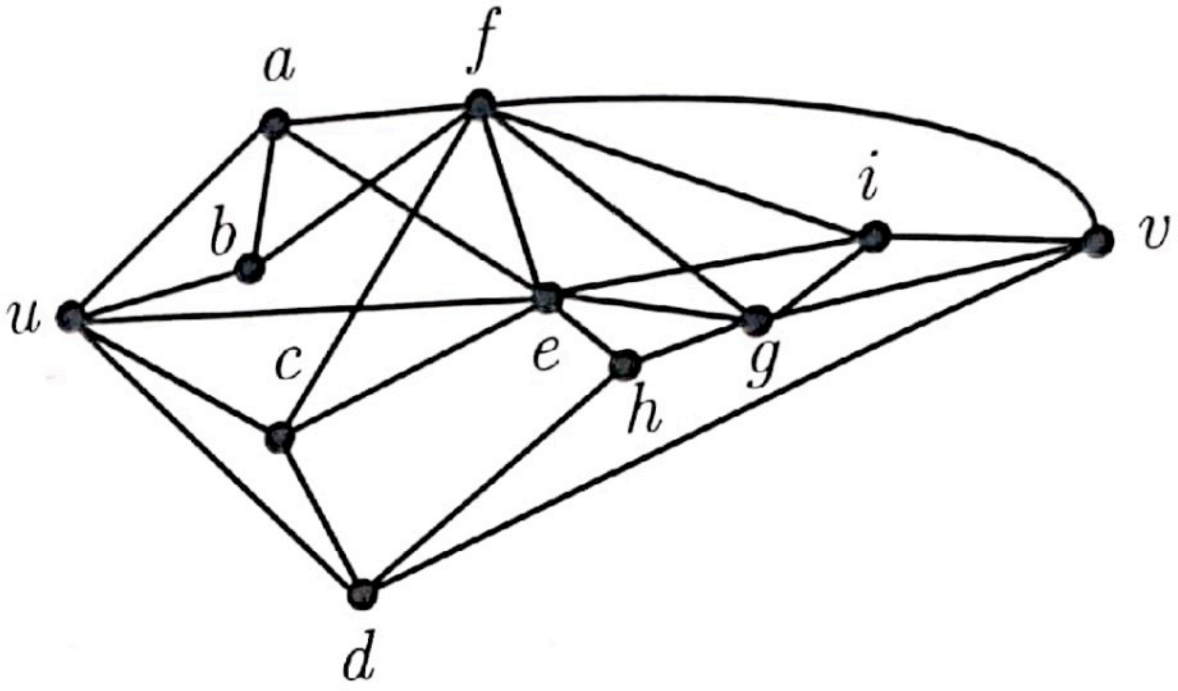


Il est le fils de l'économiste Carl Menger

Concepts de connexité
Théorème de *Menger*

Exemple

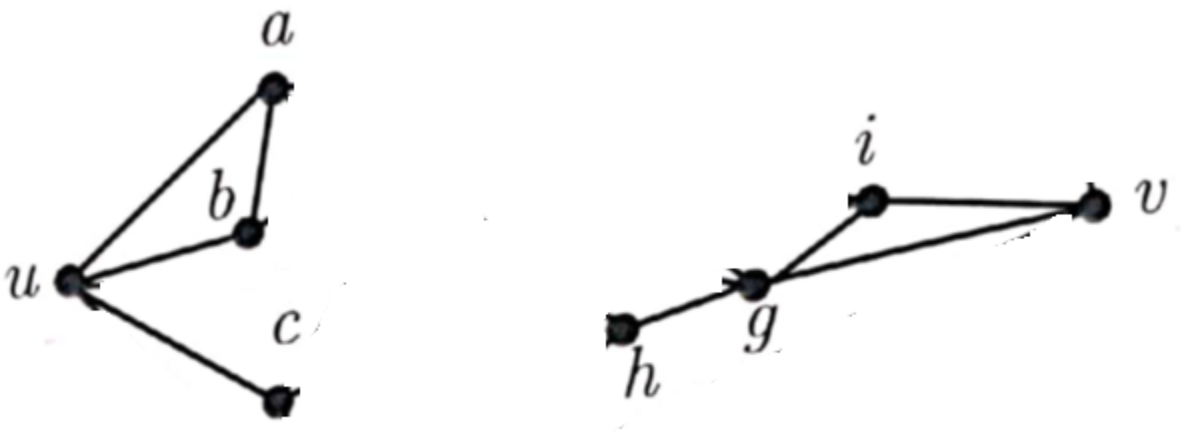
Trouvez un ensemble de séparation d'ordre minimum et un ensemble maximum de chaines disjointes connectant u et v.



Concepts de connexité
Théorème de *Menger*

Exemple

Trouvez un ensemble de séparation d'ordre minimum et un ensemble maximum de chaines disjointes connectant u et v.



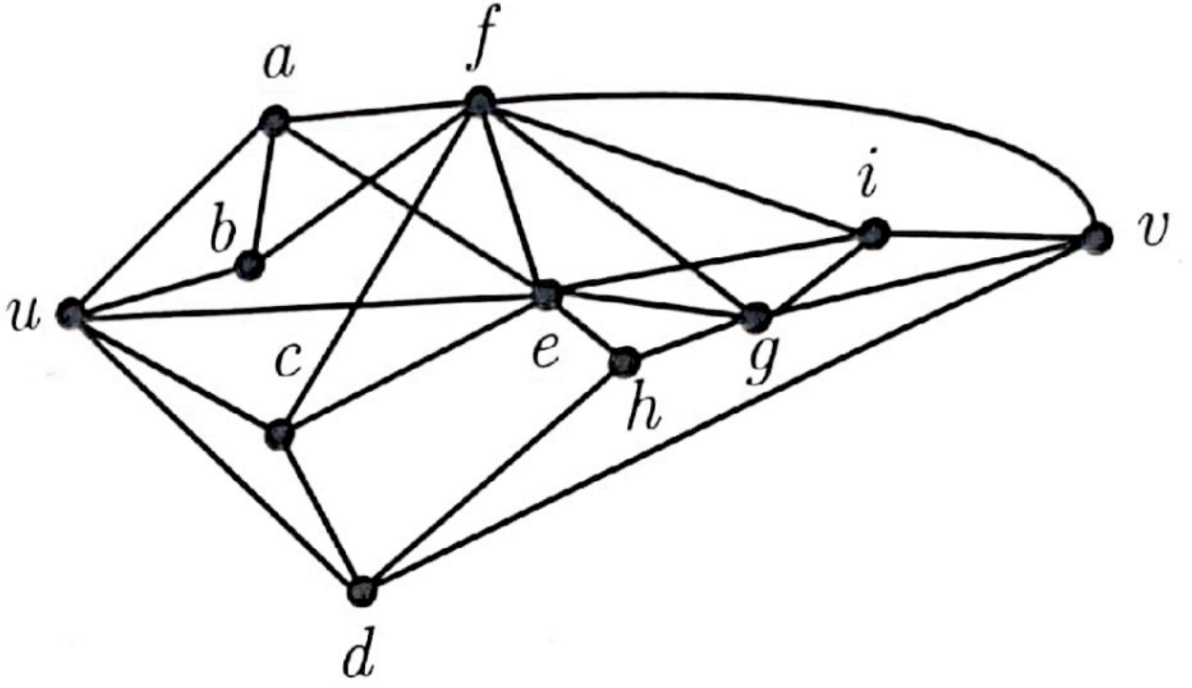
Concepts de connexité
Théorème de *Menger*

- Supposons que S est une coupe d'ordre minimum séparant les sommets non adjacents u et v dans G, et C est une collection d'ordre maximum de chaines élémentaires disjointes $u - v$, alors chaque sommet de S est contenu dans précisément une chaine de C.
- **Corollaire** . Un graphe G ayant au moins 2 sommets est $k - connexe$ ssi pour chaque paire de sommets distincts, il existe k chaines élémentaires disjointes qui les relient.
- **Théorème** . Soit u et v soit des sommets non adjacents distincts dans G, alors le nombre maximal de chaines élémentaires disjointes par les arêtes connectant u et v est égal au nombre minimum d'arêtes dans un ensemble qui sépare u et v.

Concepts de connexité
Théorème de *Menger*

Exercice

Trouvez un ensemble d'arêtes de taille minimale séparant u et v et un ensemble maximal de chaines élémentaires disjointes par les arêtes reliant u et v.



Concepts de connexité
Théorème de *Menger*

- Un ensemble d'arêtes séparant u et v de taille minimale est désigné sous le nom de **coupe $u - v$ minimale**.
- Nous verrons dans la dernière semaine (semaine 10) que les coupes minimales jouent un rôle clé dans la théorie des flux maximaux dans les réseaux.