Théorie des Graphes

Université Libanaise
Faculté des Sciences
License Informatique
2ème année – S3

Syllabus

1. Concepts introductifs
2. Introduction aux graphes et à leurs utilisations
3. Arbres et graphes bipartis
4. Distance et connexité
5. Matrices
6. Algorithmes sur les graphes
7. Coloration des graphes
8. Graphes Eulériens et Hamiltoniens
9. Graphes planaires
10. Digraphes et réseaux

Graphes Eulériens et Hamiltoniens

Semaine 8

Graphes Eulériens et Hamiltoniens

- De nombreux problèmes théoriques et appliqués en théorie des graphes nous obligent à parcourir un graphe d'une manière particulière.
- Dans certains problèmes, le but est de trouver un chaîne simple ou un circuit afin de traverser **chaque arête exactement une fois** .
- Dans d'autres problèmes, nous devons trouver un chaîne élémentaire ou un cycle qui **inclut chaque sommet exactement une fois** .

Plan

- Graphes Eulériens
- Hamiltonicité
- Applications

Leonhard Euler

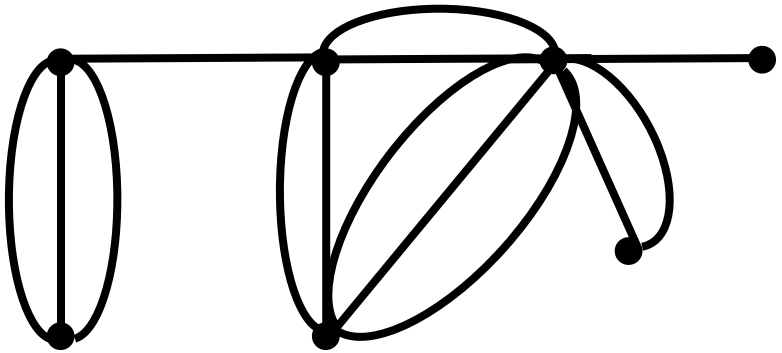
- 1707 - 1783
- Mathématicien suisse
- L'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps avec 886 articles et livres.
- Il était totalement aveugle lorsqu'il a produit la plupart de ces papiers.
- Nombreux théorèmes et formules avec le nom Euler (prononcé en anglais" oiler").
- Les théoriciens des graphes se réfèrent souvent à Euler comme le père de la théorie des graphes.

Graphes eulériens

- Pour les graphes eulériens, nous voulons parcourir <u>chaque</u> arête d'un graphe et revenir à notre point de départ.

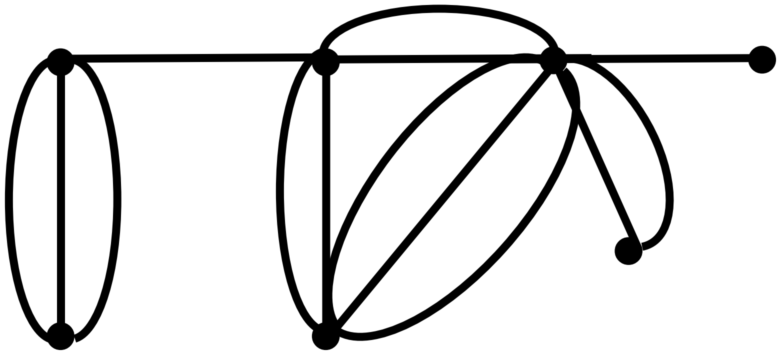
Multigraphes

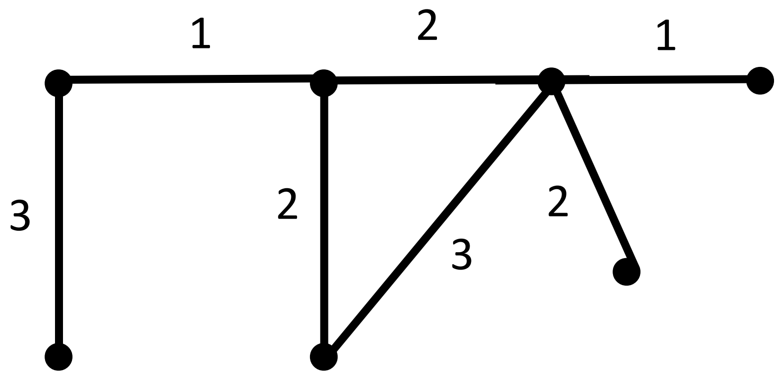
- Nous allons permettre à plusieurs arêtes d'exister entre une paire de sommets donnée. Une carte aérienne pourrait indiquer l'existence de plusieurs vols entre Beyrouth et Paris en dessinant plusieurs arêtes entre eux.
- Plusieurs arêtes incidentes avec la même paire de sommets sont appelées arêtes multiples.
- Si plusieurs arêtes sont autorisées, la structure résultante est appelée un multigraphe.
- Assurez-vous de compter chaque arête incidente avec un sommet donné lors du calcul de son degré.



Multigraphes

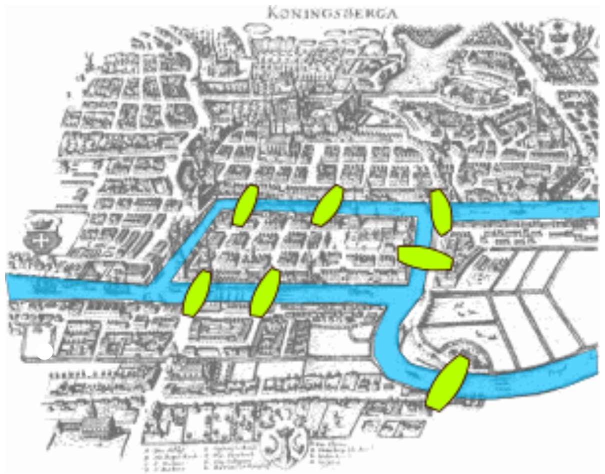
- Si le nombre d'arêtes multiples entre *u* et *v* est grand, disons *k* , il est beaucoup plus pratique de ne dessiner qu’une seule arête et de la pondérer par *k* .
- Une telle structure est appelée un **graphe pondéré** (**weighted graph**) ou un **réseau** (**network**).
- Si les poids sont omis, on obtient le graphe sous-jacent du multigraphe.

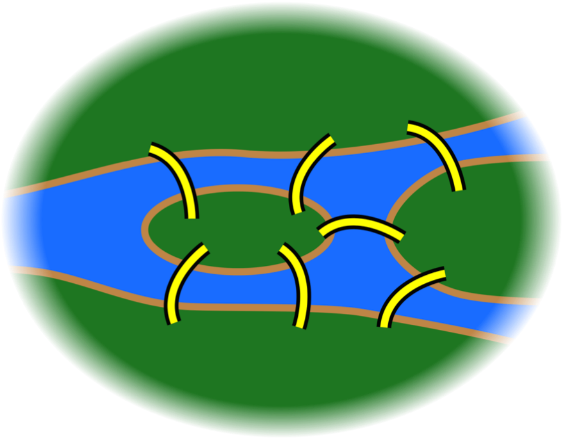


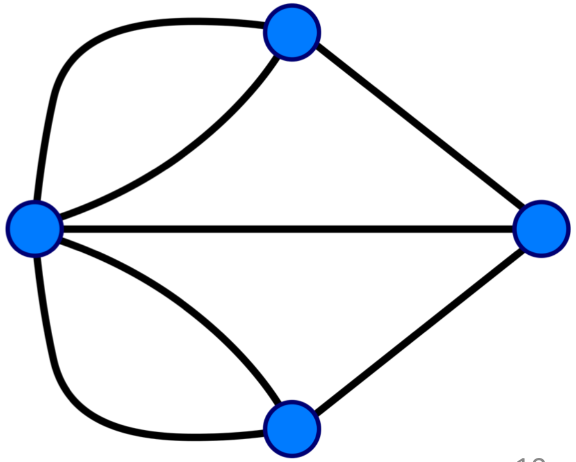


Problème des sept ponts de Königsberg

- C'est l'origine de la théorie des graphes.
- Dans les années 1730, un problème intéressant intrigua les mathématiciens d'Europe: le problème des «sept ponts de Königsberg» appelait à une promenade qui traversait chacun des sept ponts de Königsberg en Prusse (maintenant appelé Kaliningrad en Russie) exactement une fois et se terminait là où il avait commencé.

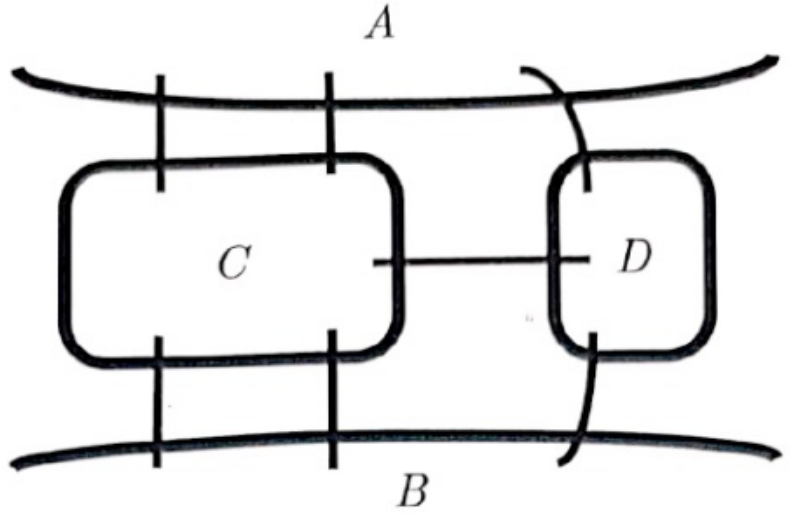


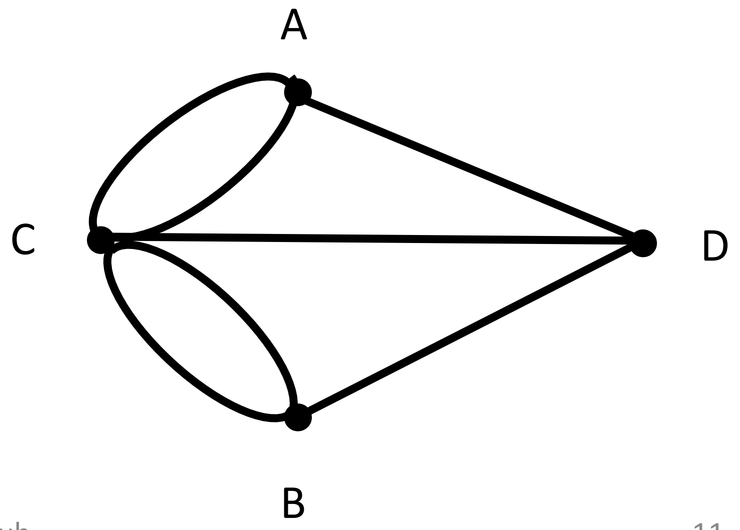




Problème des sept ponts de Königsberg

- Pour résoudre ce problème, Euler a probablement commencé par dessiner une image de la situation. Ici C et D sont des îles, et A et B au bord de la rivière Pregel.
- Comme un bon mathématicien, Euler a reconnu que les dimensions des masses continentales (A, B, C et D) n'étaient pas pertinentes, tout comme les longueurs des ponts. Il a redessiné le diagramme sous forme de multigraphe.



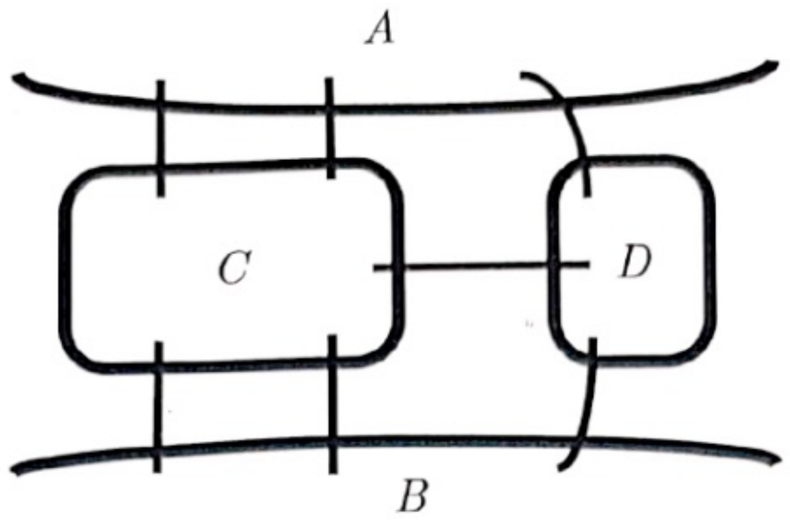


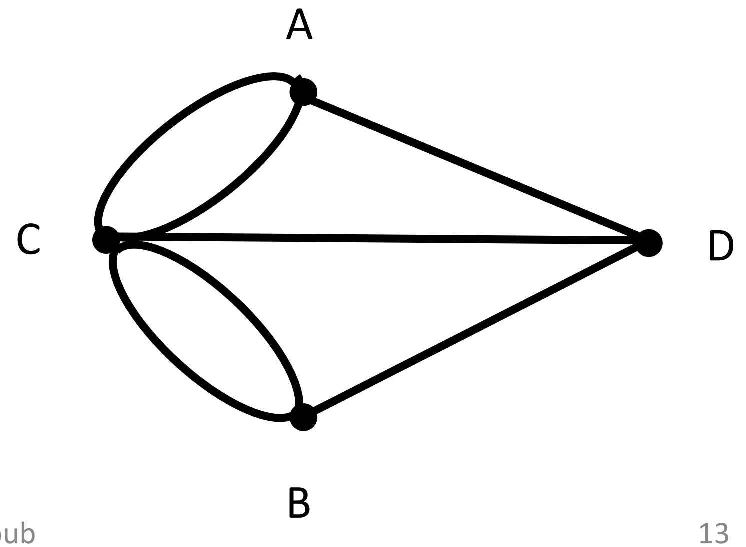
Problème des sept ponts de Königsberg

- En termes de théorie des graphes, le problème nécessite une chaîne simple (piste) fermée, c'est-à-dire un circuit qui traverse chaque arête du multigraphe exactement une fois. Le circuit peut revoir un sommet aussi souvent que nécessaire.
- Les multigraphes avec cette propriété sont maintenant appelées **euleriens**, et le circuit associé est appelé un **circuit eulérien**.

Problème des sept ponts de Königsberg

- Euler a observé que chaque degré du multigraphe de Königsberg est impair. Ainsi aucun sommet ne peut servir de sommet initial puisque le circuit doit partir puis revenir, sortir puis revenir, et ainsi de suite, nécessitant un degré pair.
- De même, aucun sommet ne peut servir de sommet intermédiaire puisque le circuit doit entrer puis sortir, entrer puis sortir, et ainsi de suite, nécessitant à nouveau un degré pair.





Graphes eulériens

- Euler a établi une condition nécessaire à l'existence d'un circuit eulérien.
- **Chaque sommet doit avoir un degré pair.**
- Cette condition s'est avérée plus tard suffisante, produisant le théorème suivant:

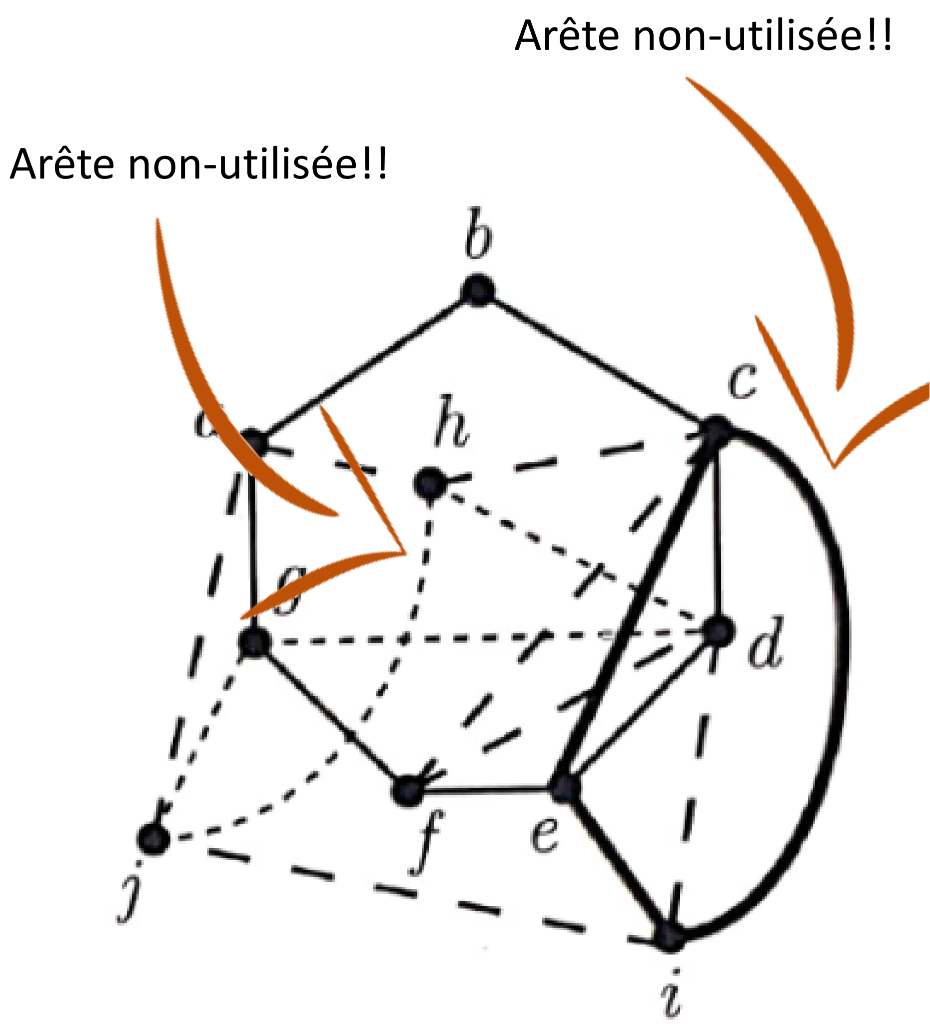
  Théorème Un graphe (ou multigraphe) *G* est eulérien si et seulement si *G* est connexe et que chaque sommet a un degré pair.

Graphes eulériens

- Nous devons montrer que si *G* est connexe et que chaque sommet a un degré pair, alors *G* est eulérien.
- Supposons que *G* est un graphe connexe où chaque sommet a un degré pair. Nous construisons un circuit eulérien comme suit: Commencez à n'importe quel sommet u_1 et commencez une chaine simple en partant le long d'une de ses arêtes incidentes u_1v_1. Ensuite, comme le degré de $v_1$est pair, il y a une arête inutilisée à v_1, alors sortez le long d'une de ces arêtes. A chaque fois que nous arrivons à un nouveau sommet, nous pouvons partir sauf éventuellement lors du retour au sommet u_1 pour la dernière fois (toutes les arêtes incidentes avec u_1 auront alors été utilisées). A ce moment, un circuit C_1 a été trouvé.

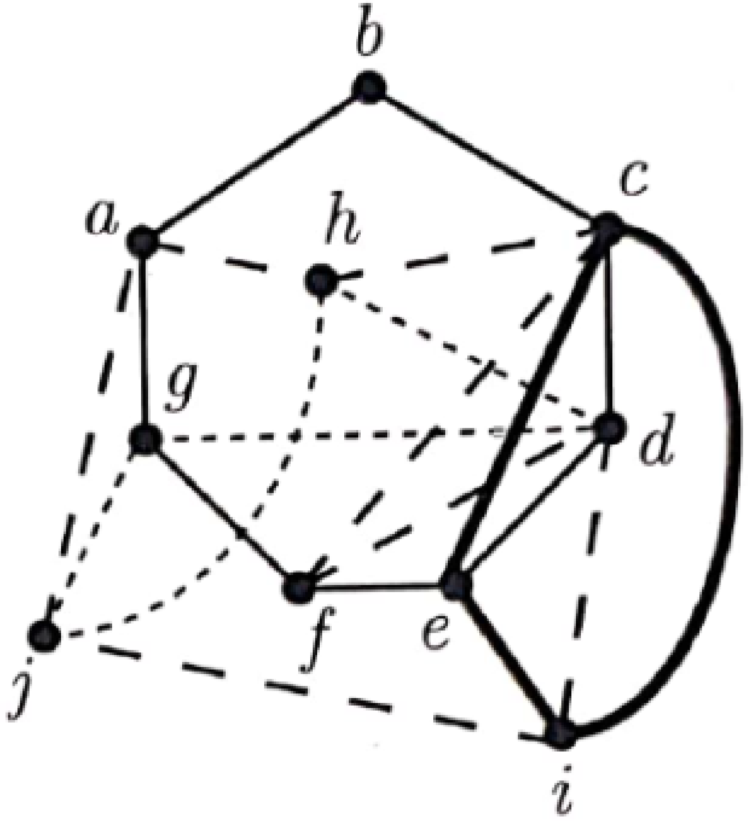
Graphes eulériens
Exemple

- Nous pouvons commencer par *a* et voyager ensuite vers *b, c, d, e, f, g, a le* long des arêtes **solides** minces .
- Peuisque le degré complet de *a* n'a pas encore été atteint, nous laissons *une* fois de plus *a* par l'arête *ah* et voyageons le long des arêtes **pointillées** *h, c, f, d, i, j, a* .
- Maintenant, le degré de *a* est épuisé.
- Le circuit résultant est = *a, b, c, d, e, f, g, a, h, c, f, d, i, j, a.*



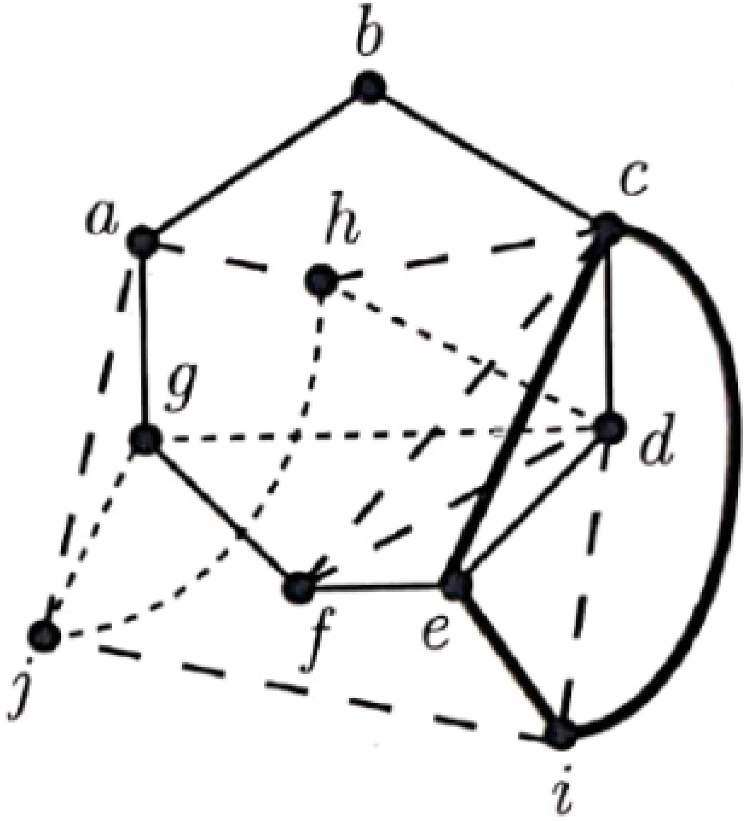
Graphes eulériens
Exemple

- Si C_1 contient toutes les arêtes, nous avons terminé; C_1 est un circuit eulérien. Sinon, un sommet u_2 sur C_1 est incident avec une arête inutilisée. Nous commençons un nouveau circuit C_2 en u_2 parcourant des arêtes inutilisées jusqu'à ce que nous ne puissions pas aller plus loin.
- En raison du degré pair de chaque sommet, C_2 se terminera à u_2.
- Nous pouvons commencer un deuxième circuit en *d en* utilisant les arêtes **pointillées** . Cela produit = *d, h, j, g, d*.



Graphes eulériens
Exemple

- Si $C_1 \cup C_2$ contient toutes les arêtes, nous avons terminé. Sinon, on recommence à un sommet u_3 de $C_1 \cup C_2$ incident avec une arête inutilisée et on génère un autre circuit.
- Nous obtenons un troisième circuit en quittant *c le* long d'une arête **solide** épaisse pour obtenir = *c, i, e, c*.
- Finalement, nous avons généré une séquence de circuits, circuits C_1, C_2,…, C_k, de sorte que $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$ comprend toutes les arêtes de *G*.



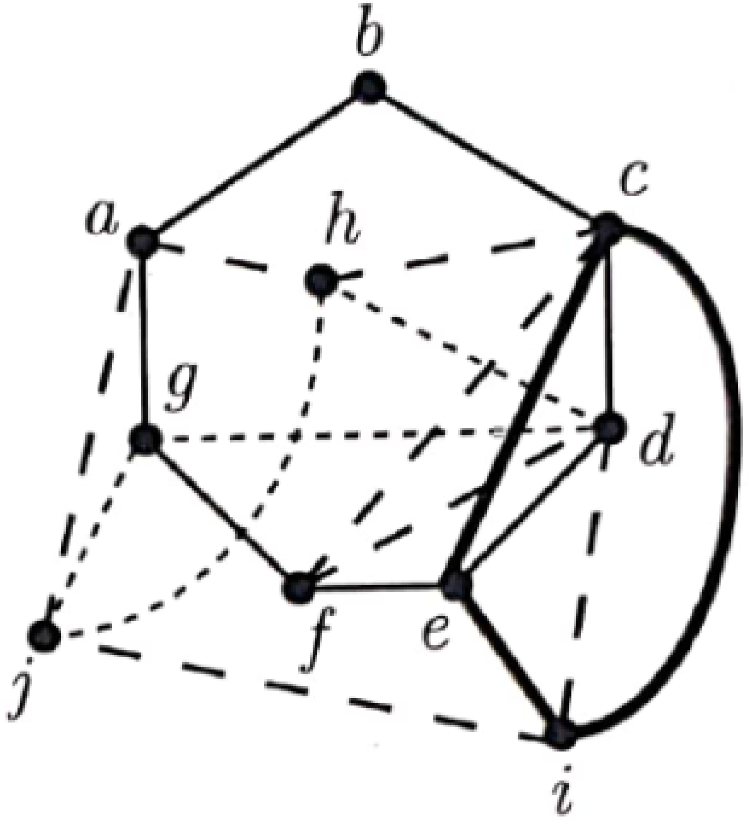
Graphes eulériens
Exemple

- Maintenant, en utilisant la séquence de circuits C_1, C_2,..., C_k nous générons notre circuit eulérien.
- Commencez à u_1, le premier sommet de C_1, et parcourez C_1 jusqu'à ce que vous rencontriez u_2 pour la première fois. Puis insérez le circuit C_2 à ce stade.
- Dans le circuit résultant, recherchez la première fois que le sommet u_3 apparaît et insérez C_3 à ce point.
- Continuez ce processus jusqu'à trouver finalement la première apparition du sommet u_k dans le circuit généré à partir de C_1, C_2,..., C_{k-1} et insérez C_k à ce point.
- Le circuit résultant que nous avons généré est un circuit Eulerian pour G .

Graphes eulériens
Exemple

- En utilisant les trois circuits C_1 = *a, b, c, d, e, f, g, a, h, c, f, d, i, j, a*, C_2 = *d, h, j, g, d* et C_3 = *c, i , e, c* , nous pouvons construire un circuit eulérien.
- Nous insérons C_2 là où nous voyons d'abord le sommet *d* dans le circuit.
- Ainsi, on obtient $C_1 \cup C_2$ = *a, b, c, d, h, j, g, d, e, f, g, a, h, c, f, d, i, j, a*
- Nous nous insérons C_3 ensuite dans le circuit résultant au premier emplacement où *c* apparaît. Cela donne = *a, b, c, i, e, c, d, h, j, g, d, e, f, g, a, h, c, f, d, i, j, a.*

- C'est le circuit eulérien résultant pour le graphe.



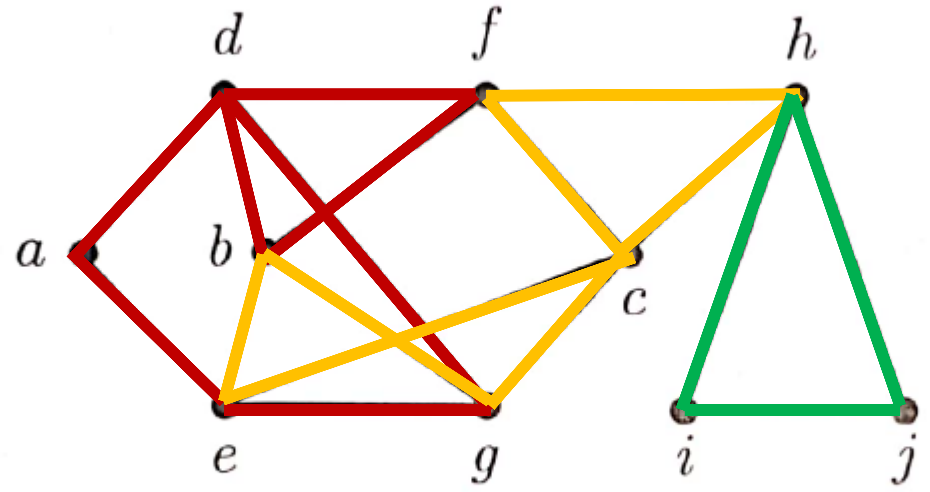
Graphes eulériens
Exemple

- La preuve du théorème est un exemple de ce qu'on appelle une **preuve constructive** .
- Une telle preuve donne en fait une méthode pour trouver (ou construire) l'objet que le théorème revendique existe.

Graphes eulériens

EXERCICE

Trouvez un circuit eulérien pour le graphe suivant.



$C_1 =$ *a, d, b,* ***f, d, g, e, a***

$C_2 =$ *f,* ***h,*** *c, g, b, e, c, f,*

$C_3 =$ *h, i, j, h,*

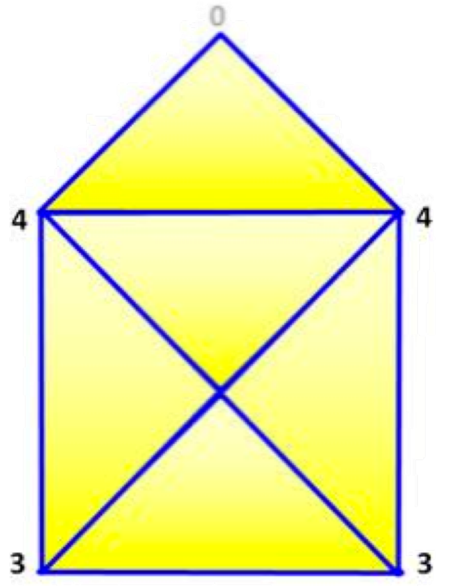
Graphes eulériens

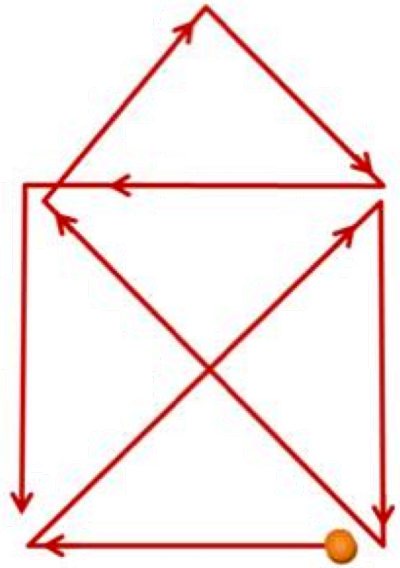
- S'il y a exactement deux sommets de degré impair, il n'y a pas de circuit eulérien mais il y a un **chemin eulérien** - c'est-à-dire une chaîne simple qui traverse chaque arête du multigraphe exactement une fois.
- Ces graphes sont appelés **semi-eulériens** .
- Un graphe est **traversable** s'il est eulérien ou semi-eulérien.
- Si G a plus de 2 sommets de degré impair, alors aucune trace eulérienne ne peut exister.
- **Corollaire** Un graphe (ou multigraphe) connexe G est semi-eulérien si et seulement si G a précisément deux sommets de degré impair. De plus, un chemin eulérien en G doit commencer à l'un des sommets impairs et se terminer à l'autre.

Graphes semi-eulériens

EXEMPLE

- La célèbre enveloppe ouverte
- Dessinez l'enveloppe en un trait. Cette énigme est apparue dans les livres de mathématiques en 1844.
- Nous notons deux sommets impairs, et seulement deux, le tracé est donc possible.
- Notez que la pointe de l'enveloppe (0) n'est pas un sommet.





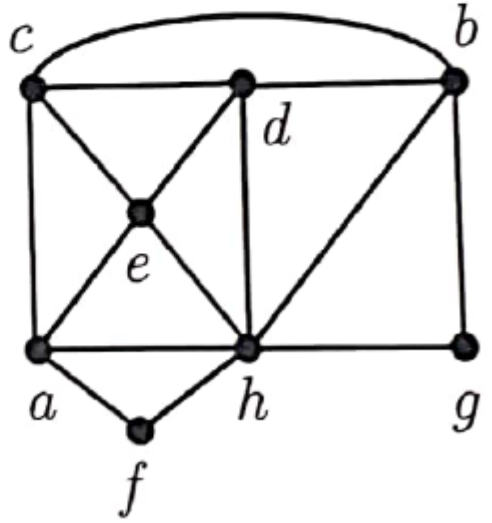
Graphes eulériens
Applications

- Les graphes eulériens ont de nombreuses applications réelles, telles que la conception d'itinéraires appropriés pour la livraison du courrier, le ramassage des ordures, le déneigement, etc.
- Un problème bien connu lié aux graphes eulériens, le **problème du facteur chinois** (**Chinese postman problem**).

Graphes eulériens
Déneigement

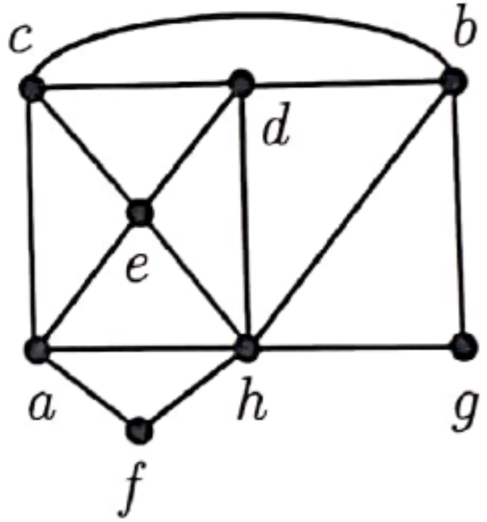
EXERCICE

Supposons que les rues d'une petite ville soient disposées comme dans la figure suivante. Chaque arête représente un bloc sur une rue particulière et chaque sommet est l'intersection de l'endroit où un ou plusieurs blocs se rencontrent. Supposons que le garage de chasse-neige de la ville soit situé à l'intersection d . Démontrez qu'il est possible pour le chasse-neige de déneiger chaque rue exactement une fois sans revisiter aucun bloc de sorte que le chasse-neige retourne à son garage immédiatement après avoir déneigé le dernier bloc. Trouvez un itinéraire que le chasse-neige pourrait emprunter pour accomplir la tâche.



Graphes eulériens
Déneigement

SOLUTION



$C_1 = d, b, c, d, h, e, d$

$C_2 = c, e, a, h, f, a, c$

$C_3 = b, g, h, b$

$d, b, g, h, b, c, e, a, h, f, a, c, d, h, e, d$

Plan

- Graphes eulériens
- Hamiltonicité
- Applications

Hamiltonicité

- Dans la partie précédente, nous nous sommes occupés de parcourir un graphe afin d'inclure **chaque arête exactement une fois** .
- Dans d'autres applications, il est plutôt important d'inclure **chaque sommet une seule fois**.

Graphes hamiltoniens

- Un graphe avec une chaîne élèmentaire couvrante est appelé **traçable** .
- Un graphe avec un cycle couvrant est appelé **hamiltonien** et le cycle associé est un **cycle hamiltonien** .
- Les graphes hamiltoniens sont traçables, mais il n'y a pas d'implication inverse comme le montre P_n.
- Un graphe non hamiltonien traçable est appelé **semi-hamiltonien** . Ainsi, un graphe semi-hamiltonien a un chemin hamiltonien mais pas de cycle hamiltonien.
- **Contrairement à la situation pour les graphes eulériens, il est souvent extrêmement difficile de décider si un graphe donné est hamiltonien. En réalité. il n'y a pas d'algorithme efficace connu pour faire cela.**

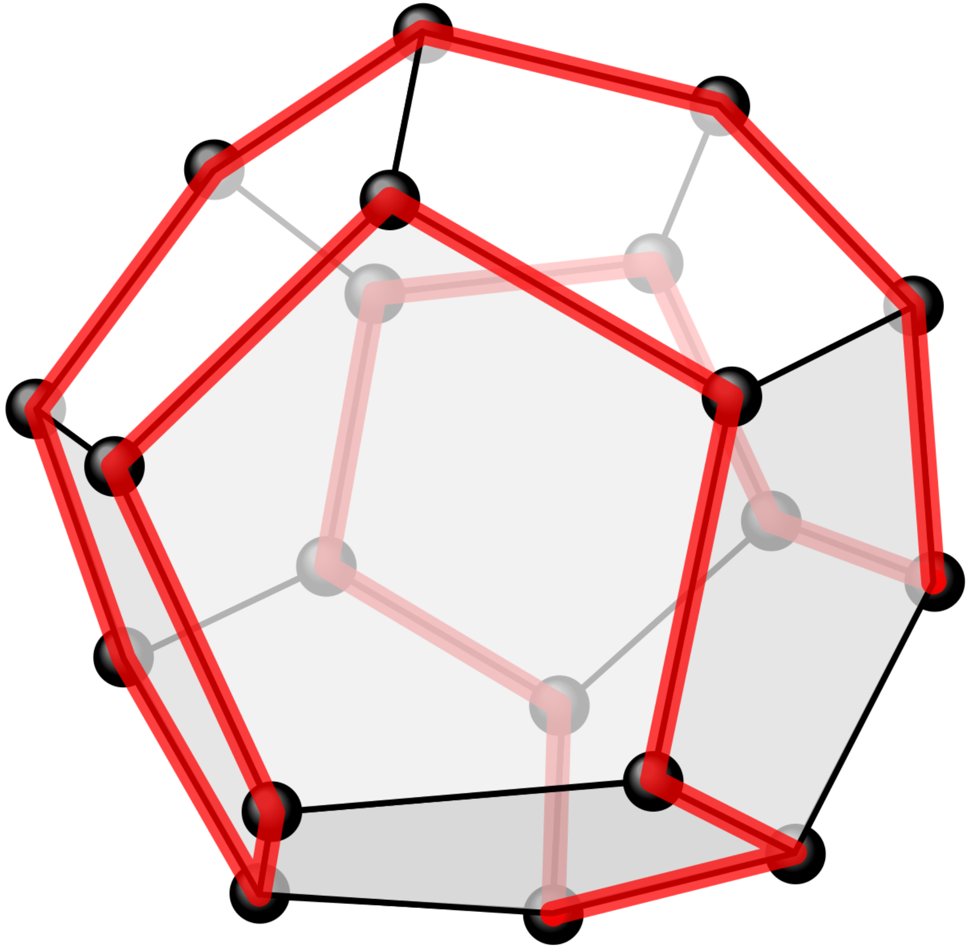
Graphes hamiltoniens

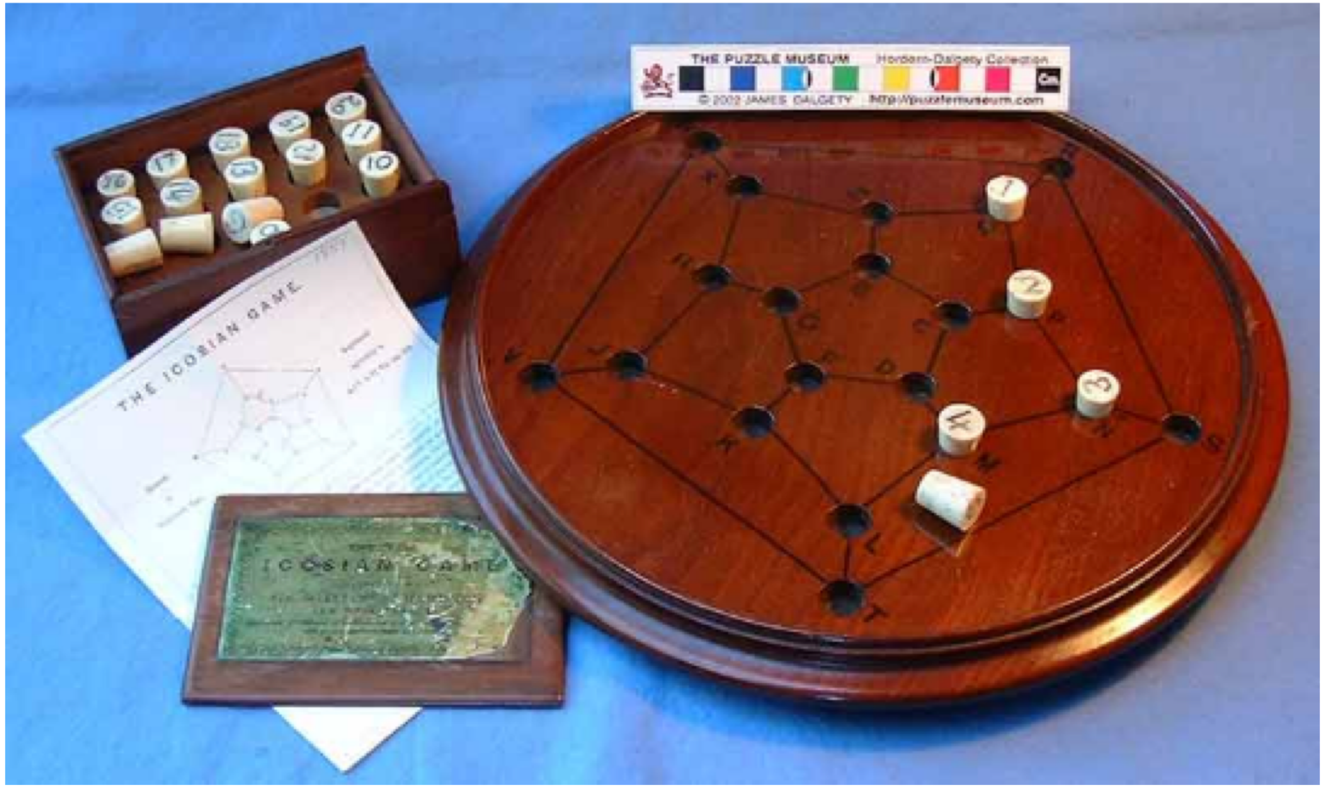
- Parfois, nous pouvons éliminer la possibilité qu'un graphe soit hamiltonien en faisant des observations judicieuses:
  - Pour qu'un graphe biparti soit hamiltonien: il doit être équitable.
  - Pour qu'un graphe soit hamiltonien, c'est qu'il ne doit pas contenir de points d’articulations.

Le jeu de Hamilton

- Les graphes hamiltoniens portent le nom du célèbre mathématicien irlandais Sir William Rowan Hamilton (1805-1863), qui fut le premier à donner une description algébrique des nombres complexes.
- Hamilton a également inventé le jeu Icosian, parfois appelé le jeu Around the World, au milieu des années 1800.

Le jeu de Hamilton





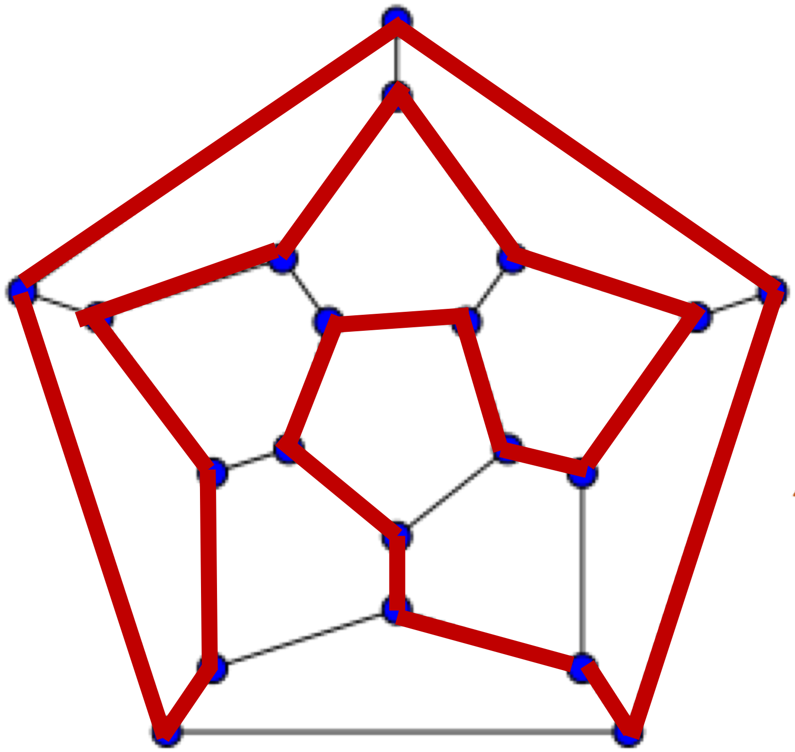
Le jeu de Hamilton

- Son jeu consistait à déplacer une cheville en bois sur le graphique d'un dodécaèdre solide. Le dodécaèdre a 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces. Chaque visage a la forme d'un pentagone. Dans le jeu, chaque sommet représente une ville bien connue. Le but du jeu était de trouver un tour du monde qui visitait chaque ville exactement une fois et se terminait là où il avait commencé. Lors de la construction du circuit, nous ne sommes autorisés à "déplacer la cheville" que le long d'un bord qui relie une ville à une autre.

Le jeu de Hamilton

Exemple

Trouvez un cycle hamiltonien dans le dodécaèdre et obtenez ainsi un tour du monde pour le jeu icosien de Hamilton.



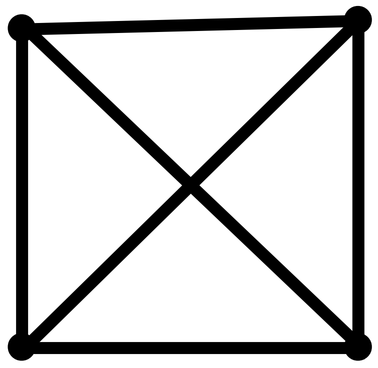
Un cycle hamiltonien possible!!

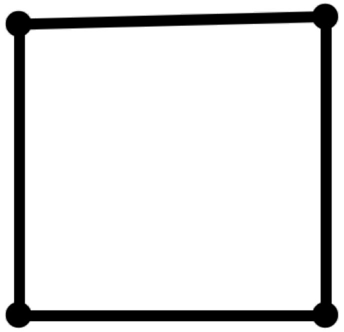
Hamiltonicité

Exercice

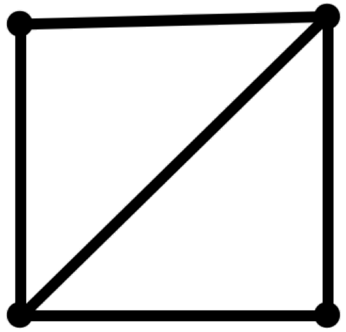
Dessinez un graphe connexe sur quatre sommets (si possible) qui est:

a. Hamiltonien et eulérien
b. Hamiltonien et semi-eulérien
c. Hamiltonien mais même pas semi-eulérien
d. Eulérien et semi-hamiltonien
e. Eulérien mais même pas semi-hamiltonien
f. Semi-eulérien et semi-hamiltonien
g. Ni traçable ni traversable

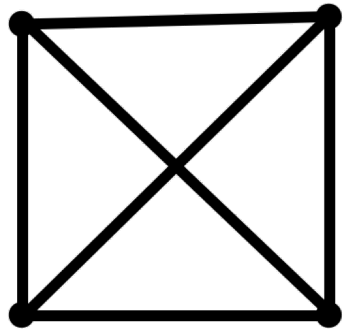




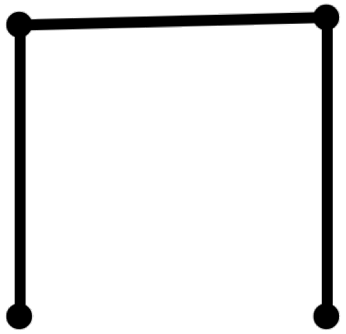
Hamiltonian and eulerian



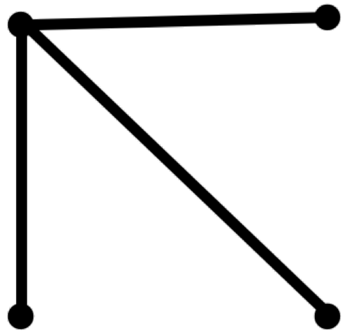
Hamiltonian and semi-eulerian



Hamiltonien mais même pas semi-eulérien



Semi-eulérien et semi-hamiltonien



Ni traçable ni traversable

Conditions suffisantes

- De nombreuses conditions garantissant qu'un graphe donné est hamiltonien ont été prouvées.
- **Théorème** Si *G* est un graphe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ pour tout $v \in V(G)$, alors *G* est hamiltonien.

Plan

- Graphes eulériens
- Hamiltonicité
- Applications

Applications

- Une simple introduction à deux autres applications:
  - Le problème du facteur chinois (The Chinese postman problem)
  - Le problème du voyageur de commerce (The Traveling salesman problem)

Problème de facteur chinois

- Supposons qu'un facteur doit commencer l'itinéraire de la journée au bureau de poste et livrer le courrier le long de chaque rue dans un quartier donné et retourner au bureau de poste une fois l'itinéraire terminé.
- Il est clair que chaque rue doit être traversée au moins une fois. De plus, il serait possible de concevoir un tel itinéraire traversant chaque rue exactement une fois si et seulement si le graphe modélisant le voisinage est eulérien.
- Cela se produit si et seulement si le graphe est connexe et que chaque sommet a un degré pair.
- Puisque tous les quartiers ne satisferont pas à cette condition, le problème est assoupli pour exiger que chaque rue soit traversée au moins une fois plutôt qu'exactement une fois, mais le nombre minimum de rues doit être traversé. Autrement dit, l'itinéraire doit être aussi court que possible.

Problème de facteur chinois

- Le problème du facteur chinois nous oblige à trouver un chemin couvrant fermé de longueur minimale qui inclut chaque arête d'un réseau au moins une fois.
- Le réseau est en fait un graphe pondéré où le poids $w(e)$ d’une arête donnée e est la distance entre ses extrémités.
- Si le poids total du réseau est *k* et que chaque arête a un poids $w(e) \geq 0$, alors la distance totale que le facteur doit parcourir est comprise entre *k* et *2k* .
- Le pire des cas du problème se produit lorsque le graphe sous-jacent du réseau est un arbre.

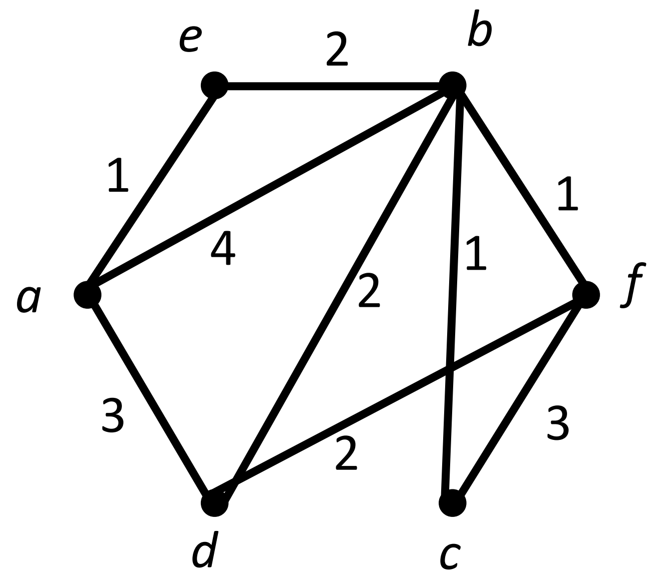
Problème de facteur chinois Algorithme

- L'idée de base nécessaire pour trouver le meilleur itinéraire possible dans le problème du facteur chinois est que lorsqu'il y a **des sommets de degré impair** , certaines arêtes devront être traversées plus d'une fois.
- La façon dont une route appropriée peut être trouvée est d'abord d'identifier l'ensemble *S* de sommets de degré impair. Ensuite, pour chaque paire *u, v* de sommets de *S* , trouvez la longueur d'un plus court chemin joignant *u* et *v* . (Cela peut être accompli en utilisant l'algorithme de Dijkstra, cours de la dernière semaine!!)
- Nous savons qu'il existe un nombre pair de sommets de degré impair, donc l'étape suivante consiste à appairer les sommets de *S* afin que la somme des distances entre ces paires soit minimisée. Les paires minimisant la somme déterminent quelles arêtes doivent être traversées plus d'une fois, c'est-à-dire toutes les arêtes sur les chemins les plus courts joignant ces paires.

Problème de facteur chinois

Exemple

Résolvez le problème du facteur chinois pour le graphe pondéré suivant.



Degré impair: *a, b, d, f* $S=\{a, b, d, f\}$

Trouvez les distances entre toutes les paires de sommets dans S

$d(a,b) = 3$
$d(a,d) = 3$
$d(a,f)=4$
$d(b,d) = 2$
$d(b,f)=1$
$d(d,f) = 2$

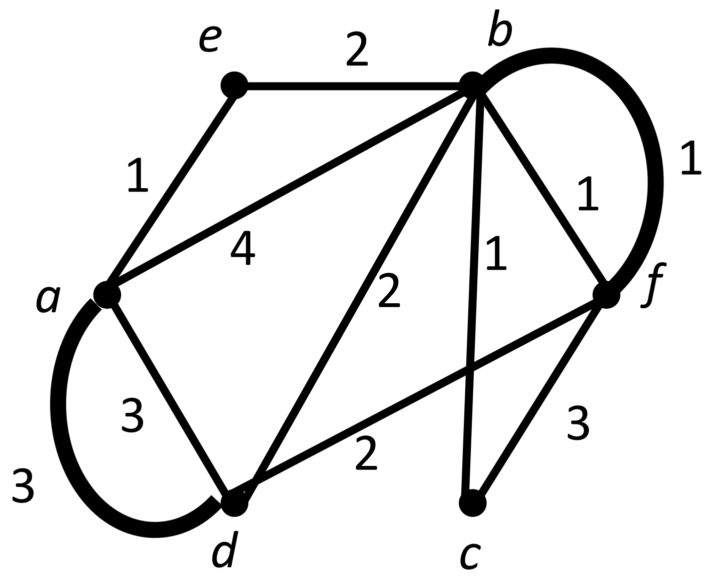
$d(a,b) + d(d,f) = 5$
$d(a,d) + d(b,f) = 4$
$d(a,f) + d(b,d) = 6$

Choisissez la somme des paires couvrant l'ensemble de l'ensemble S qui produit la somme minimale des distances.

Problème de facteur chinois

Exemple

Résolvez le problème du facteur chinois pour le graphe pondéré suivant.



Insérer des arêtes supplémentaires correspondant à celles d'un chemin le plus court joignant les paires *a, d* and *b, f*

Trouvez une visite eulérienne dans le multigraphe résultant

Exemple : *a, e, b, f, c, b, f, d, a, b, d, a*

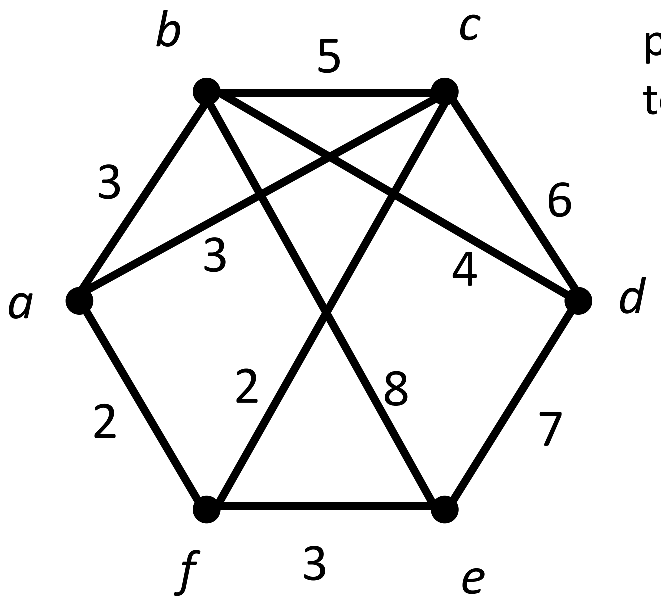
Le problème du voyageur de commerce

- Les graphes hamiltoniens sont liés au problème du voyageur de commerce: un vendeur prévoit de visiter différentes villes pour montrer sa marchandise. Il aimerait s'arrêter une fois dans chaque ville et retourner au bureau à domicile tout en minimisant son temps de déplacement.
- Pour modéliser ce problème, nous utilisons un graphe pondéré dans lequel chaque sommet représente une ville, avec deux sommets joints par une arête s'il y a une route menant directement d'une ville à l'autre. On associe à chaque arête (route) un nombre positif, le poids, qui représente le temps de trajet entre les villes jointes par l'arête.
- Pour résoudre le problème du voyageur de commerce, nous devons trouver un cycle hamiltonien qui a le plus petit poids possible dans le graphe. Un tel cycle est appelé **cycle hamiltonien de poids minimum**.

Le problème du voyageur de commerce

Trouver un cycle hamiltonien de poids minimum

Exemple



Malheureusement, il n'existe pas de méthode efficace pour résoudre le problème du voyageur de commerce. Il existe cependant des techniques d'approximation telles que la méthode branch-and-bound.

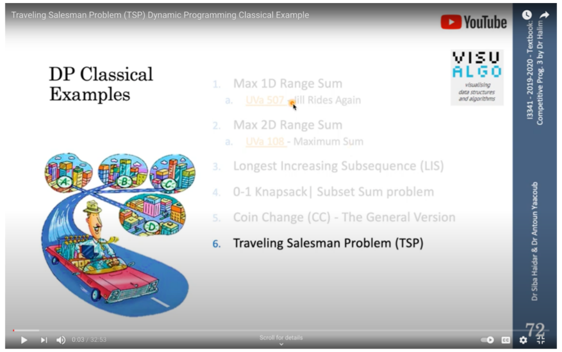
Vérifiez tous les cycles hamiltoniens !!

a, b, c, d, e, f, a	poids 26
$\boxed{\textit{a, b, d, e, f, c, a}}$	$\boxed{\text{poids 22}}$
a, b, e, d, c, f, a	poids 28
a, c, d, d, e, f, a	poids 24
a, c, d, b, e, f, a	poids 26

Le problème du voyageur de commerce

Comment coder une solution?

1. Force brute
2. Programmation dynamique
   - https://youtu.be/rxyJ5FLbZoc



3. 2-approximation
   Obtenir le MST du graphe (complet)
   Dupliquer chaque arête dans le MST et obtenir un tour eulérien
   Obtenir un tour TSP à partir du tour eulérien obtenu et sauter les sommets répétés
4. 1.5-approximation
   Obtenir le MST du graphe (complet)
   Trouver des sommets de degré impair dans le MST
   Trouver une correspondance de coût min parmi ces sommets
   Obtenir un tour eulérien en utilisant les arêtes utilisées dans MST + matching
   Obtenir un tour TSP du tour eulérien obtenu et sauter répété sommets

Le problème est un problème difficile et connu de NP. Il n'y a pas de solution polynomiale connue pour ce problème.