Théorie des Graphes

Université Libanaise
Faculté des Sciences
License Informatique
2ème année – S3

Syllabus

1. Concepts introductifs
2. Introduction aux graphes et à leurs utilisations
3. Arbres et graphes bipartis
4. Distance et connexité
5. Matrices
6. Algorithmes sur les graphes
7. Coloration des graphes
8. Graphes Eulériens et Hamiltoniens
9. Graphes planaires
10. Digraphes et réseaux

Coloration des graphes

Semaine 7

Coloration des graphes

- Divers problèmes du monde réel qui peuvent être modélisés par des graphes nécessitent que l'ensemble de sommets ou l'ensemble d'arêtes soit partitionné en ensembles disjoints de sorte que les éléments d'un ensemble donné ne soient pas mutuellement adjacents.
- Les problèmes courants sont la planification des réunions ou des examens pour éviter les conflits et le stockage des produits chimiques pour éviter les interactions indésirables.

Plan

- Coloration des sommets et ensembles indépendants
- Coloration des arêtes
- Algorithmes
- Applications de la coloration de graphes

Coloration des sommets et ensembles indépendants

- Une **coloration de sommets** (correcte) d'un graphe G est une affectation de couleurs aux sommets afin que les sommets adjacents aient des couleurs distinctes. Une coloration de sommet utilisant *k* couleurs est une **k-coloration** du graphe. Un graphe qui permet une k-coloration est appelé **k-colorable**.

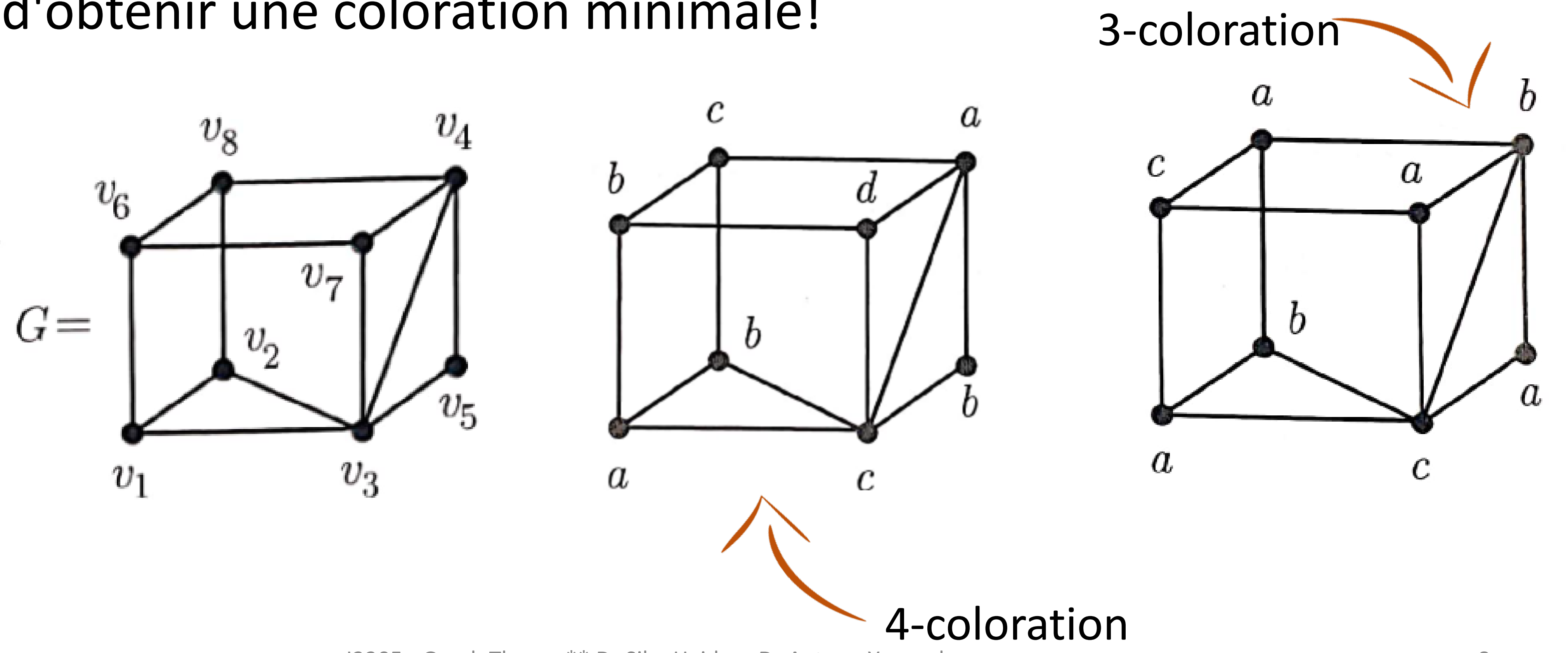
Le nombre chromatique

- Le **nombre chromatique** d'un graphe *G* , notée $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour toute k-coloration de *G*.
- En particulier,
  - un graphe *G* est biparti exactement quand $\chi(G) \leq 2$.
  - les cycles impairs sont des exemples de graphes pour lesquels $\chi = 3$.
  - $\chi(K_n) = n$

Le nombre chromatique

Exemple

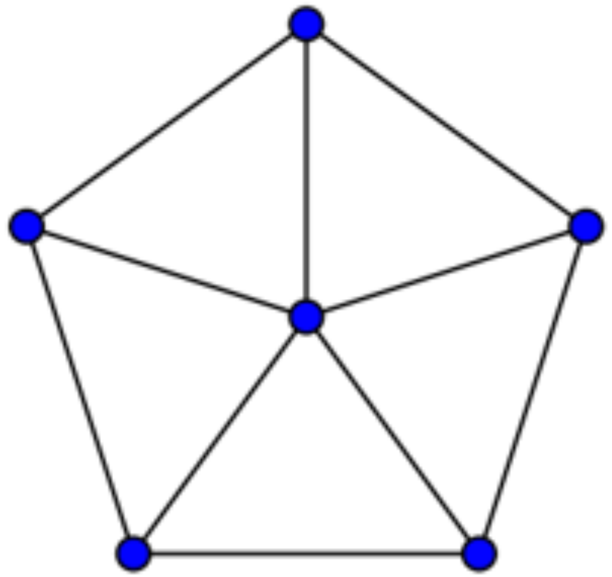
Soyez prudent lorsque vous essayez d'obtenir une coloration minimale!



Le nombre chromatique

Exercice

Calculer $\chi(W_{1,5})$



$\chi(W_{1,5})$ = 4

Le nombre chromatique

- Un graphe *G* est *k*-colorable s'il est possible d'attribuer à chaque sommet une couleur à partir d'un ensemble de *k* couleurs de telle sorte que les sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes. Le plus petit *k* pour lequel un graphe G est *k*-colorable est son nombre chromatique $\chi(G)$.
- Donc *G* est *k*-colorable signifie que $\chi(G) \leq k$.

NOTE

- Pour prouver que $\chi(G) = k$, nous devons montrer que $\chi(G) > k - 1$; c'est-à-dire qu'il est impossible de *(k-1)*-colorer *G*. Ensuite, nous devons montrer qu'il est possible de *k*-colorer *G* , ce qui est généralement fait en présentant une *k*-coloration réelle.

Le nombre chromatique

- Un graphe *G* est ***k -critique*** si
  1. $\chi(G) = k$, et
  2. $\chi(G - v) = k - 1$ pour chaque sommet $v \in V(G)$; c'est-à-dire que la suppression de tout sommet de *G* réduit le nombre chromatique
- Si $\chi(G) = k$, alors le graphe *G* doit contenir un sous-graphe *k*-critique. On peut supprimer des sommets qui ne baissent pas χ, une fois après l'autre, pour finalement atteindre un graphe *H* pour lequel ce n'est plus possible. Le graphe résultant *H* est *k*-critique.

Le nombre chromatique

- **Théorème** Si *G* est *k*-critique, alors $\delta(G) \geq k - 1$.

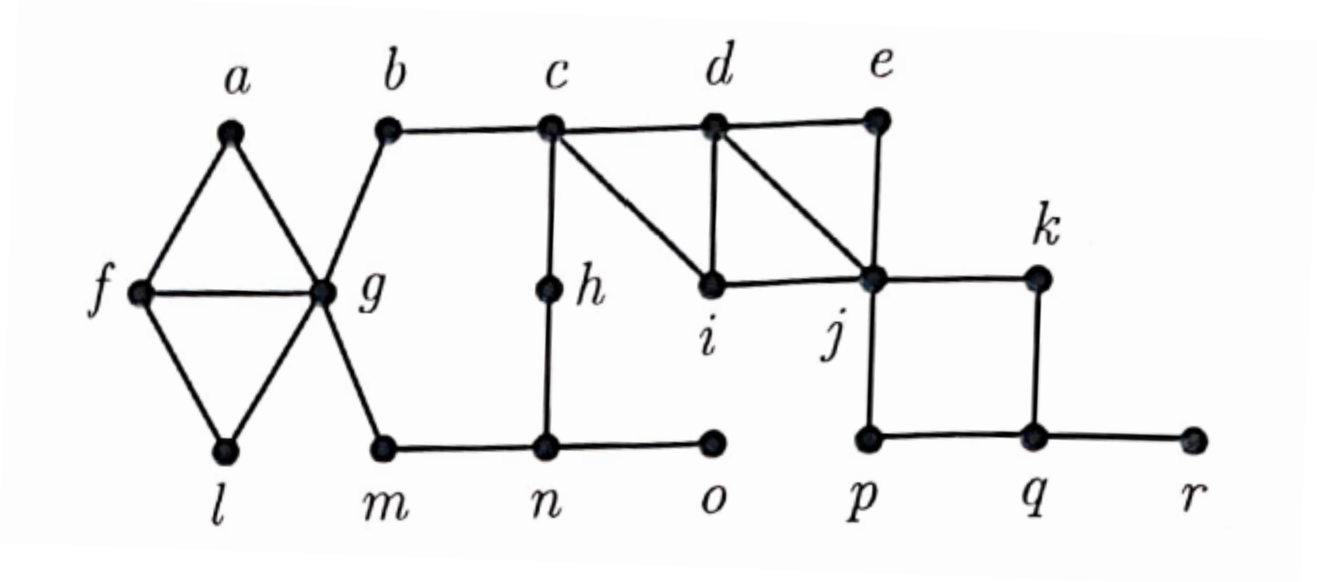
- **Théorème** Si $\chi(G) = k$, alors *G* doit avoir au moins k sommets de degré au moins $k - 1$.

- **Corollaire** $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

- A l'exception de deux classes de graphes - à savoir les cycles impairs et les graphes complets - chaque graphe connexe *G* satisfait $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Nombre chromatique et indépendance

- Un sous-ensemble *S* de sommets d'un graphe *G* est dit **indépendant** si aucune paire de sommets de *S* n'est adjacente.
- Les cinq sommets coupés *g, c, j, n, q* du graphe suivant forment un ensemble indépendant.



Nombre chromatique et indépendance

- Le **numéro d'indépendance** d'un graphe *G* , noté $\beta(G)$, est la taille maximale d'un ensemble indépendant.
  Exemples:
  - $\beta(P_5) = 3.$
  - $\beta(K_{1,n-1}) = n - 1.$
  - $\beta(K_n) = 1.$
  - $\beta(G) = 11.$ *G* est le graphe de la diapositive précédente.

Nombre chromatique et indépendance

- Soit *X = V(G) – S* , $\chi(G) = k$
- Chaque arête de *G* est incidente avec au moins un sommet de *X*.
- *V(G)* peut être partitionné en *k* jeux de couleurs.
- Nous pouvons obtenir une borne inférieure et une borne supérieure pour $\chi(G)$:
  - $\chi(G) \geq \frac{n}{\beta(G)}$
  - $\chi(G) \leq n - \beta(G) + 1$

Plan

- Coloration des sommets et ensembles indépendants
- Coloration des arêtes
- Algorithmes
- Applications de la coloration de graphes

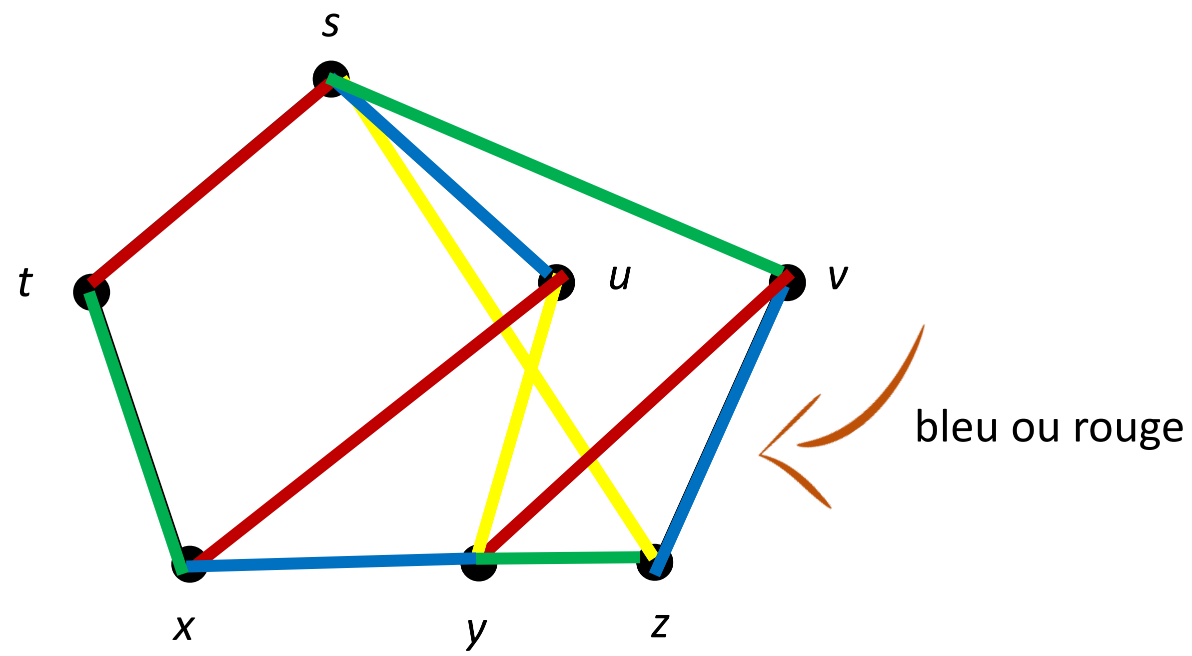
Le nombre chromatique des arêtes

- Une **coloration des arêtes** d'un graphe *G* consiste en une affectation de couleurs pour les arêtes de *G*.
- Notez qu'il n'y a aucune restriction sur la façon dont les arêtes sont colorées. Si nous ajoutons la restriction supplémentaire selon laquelle les arêtes incidentes doivent reçevoir des couleurs distinctes, la coloration est appelée une **coloration d'arêtes appropriée**.
- Le **nombre chromatique des arêtes**, $\chi_1(G)$, est le nombre minimal de couleurs requises dans une coloration d'arêtes appropriée de *G*.

Le nombre chromatique des arêtes

Exemple

Trouver le nombre chromatique des arêtes pour le graphe suivant.



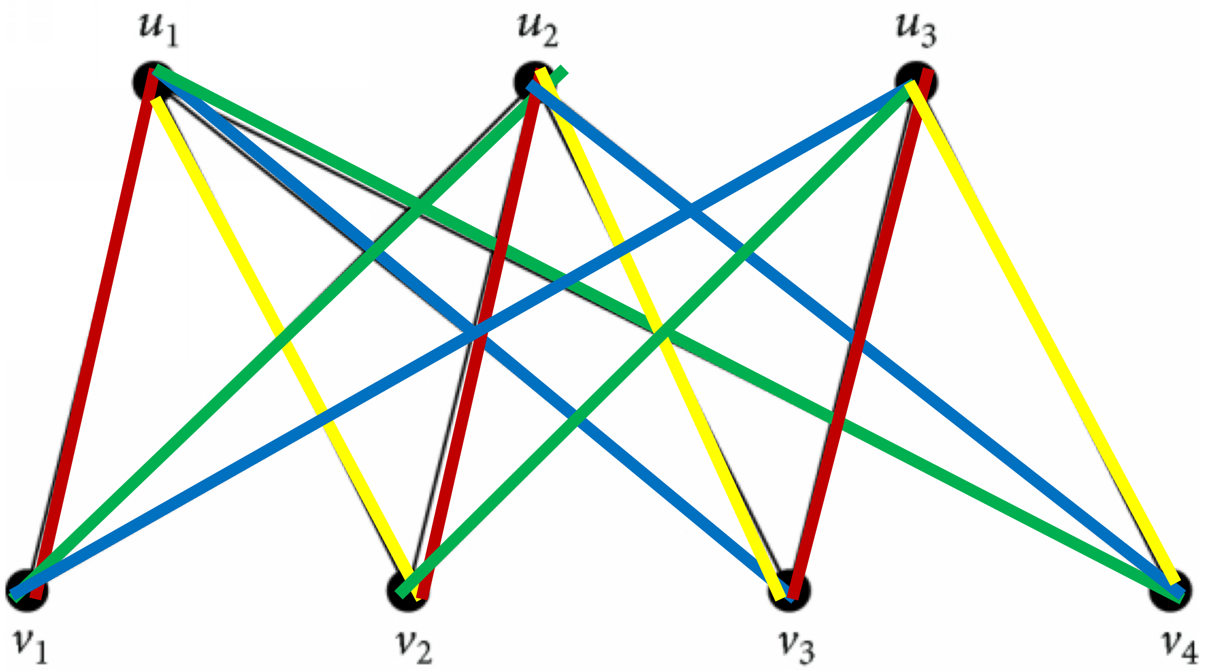
Le nombre chromatique des arêtes

- **Théorème** Pour tout graphe *G*, le nombre chromatique des arêtes est au moins aussi grand que le degré maximal parmi les sommets de *G*. C'est, $\chi_1(G) \geq \Delta(G)$.
- Ce théorème donne une borne inférieure.
  Pour les graphes bipartis complets, nous avons $\chi_1(K_{m,n}) = \max\{m, n\} = \Delta(K_{m,n})$.
- Pour obtenir une coloration correcte des arêtes en utilisant le moins de couleurs possible, nous commençons par une coloration des arêtes à un sommet *v* de degré maximum. Nous faisons ensuite *pivoter* la coloration lorsque nous nous déplaçons vers chaque sommet successif dans la même partie que *v*.

Le nombre chromatique des arêtes

Exemple

Illustrer le processus de rotation sur $K_{3,4}$.



Le nombre chromatique des arêtes

- **Théorème** Pour tout graphe *G*, $\Delta(G) \leq \chi_1(G) \leq \Delta(G) + 1$.
- **Théorème** Si *G* est un graphe biparti, alors $\chi_1(G) = \Delta(G)$.

Plan

- Coloration des sommets et ensembles indépendants
- Coloration des arêtes
- Algorithmes
- Applications de la coloration de graphes

Algorithmes de coloration de graphes

- La coloration des sommets d'un graphe pour obtenir une coloration correcte avec un nombre minimum de couleurs est connue pour être intrinsèquement difficile.
- **Théorème (Théorème de Brooks)** Si *G* est un graphe connexe et n'est ni complet ni un cycle impair, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$.
- Malheureusement, même si les preuves standard indiquent un algorithme qui réalisera une $\Delta(G)$ −coloration, la différence $\Delta(G) - \chi(G)$ peut être énorme.
  Ainsi, divers algorithmes d'approximation ont été mis au point.

Coloration séquentielle

- Cet algorithme de coloration suppose que les sommets sont étiquetés et les étiquettes sont ordonnées. Les couleurs possibles sont également classées de la plus basse à la plus élevée.
- Pour plus de simplicité, nous utilisons des lettres pour les étiquettes de sommets, classées par ordre alphabétique, et des entiers positifs pour les couleurs, classées numériquement.
- À chaque étape, la couleur la plus basse possible est attribuée au sommet suivant tout en conservant une coloration appropriée.

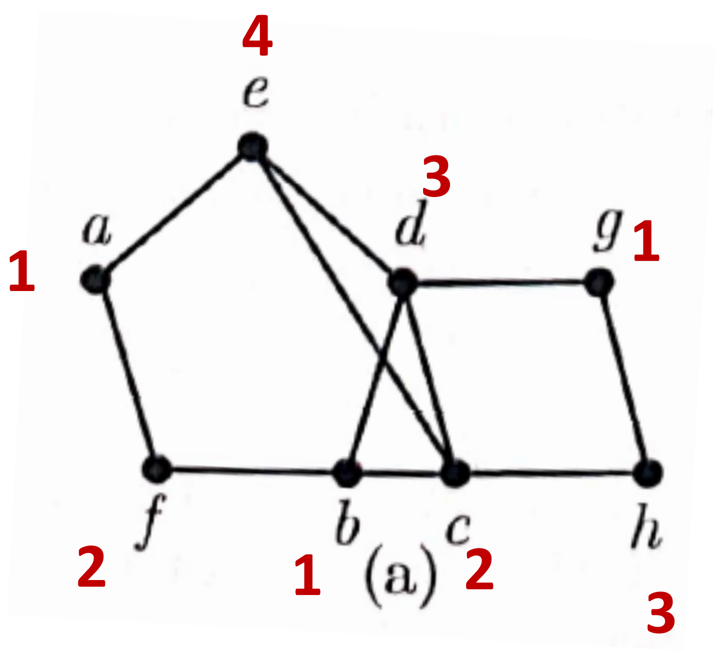
Algorithme (Coloration séquentielle)

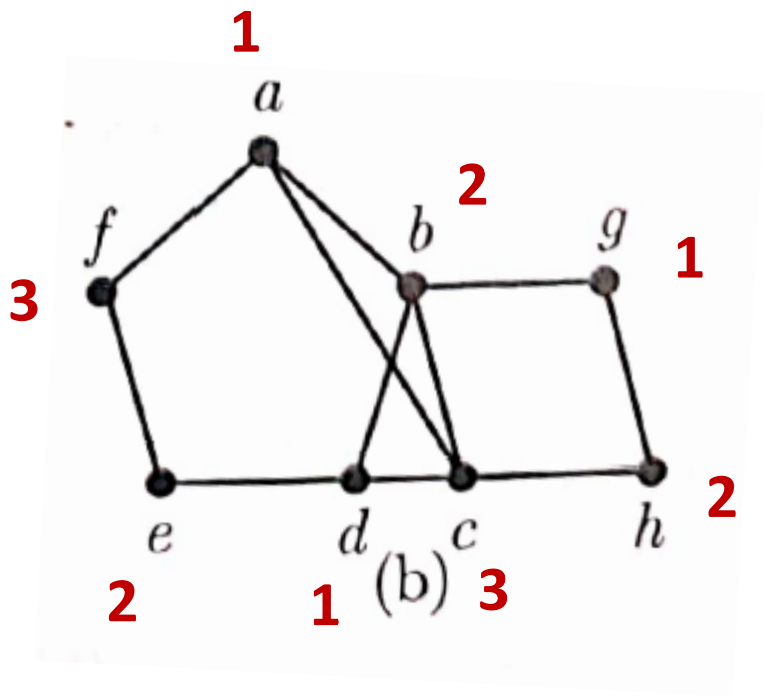
1. Colorez le premier sommet de 1.
2. Colorez chaque sommet suivant par la couleur la plus basse qui n'est utilisée par aucun de ses voisins qui ont déjà été colorés. Faites ceci jusqu'à ce que tous les sommets aient été colorés.

Coloration séquentielle

Exemple

Trouvez des colorations séquentielles pour les graphes étiquetés suivants.





Coloration maximale du degré de couleur (Maximum Color-Degree Coloring)

- L'idée est d'essayer de colorer les sommets de haut degré tôt car ils peuvent créer beaucoup de difficultés s'ils sont colorés plus tard dans le processus.
- Il essaie également simultanément de colorer un sommet dont les voisins ont déjà reçu de nombreuses couleurs distinctes.
- Le **degré de couleur** d'un sommet v est le nombre de couleurs distinctes qui ont été attribuées aux voisins de v.

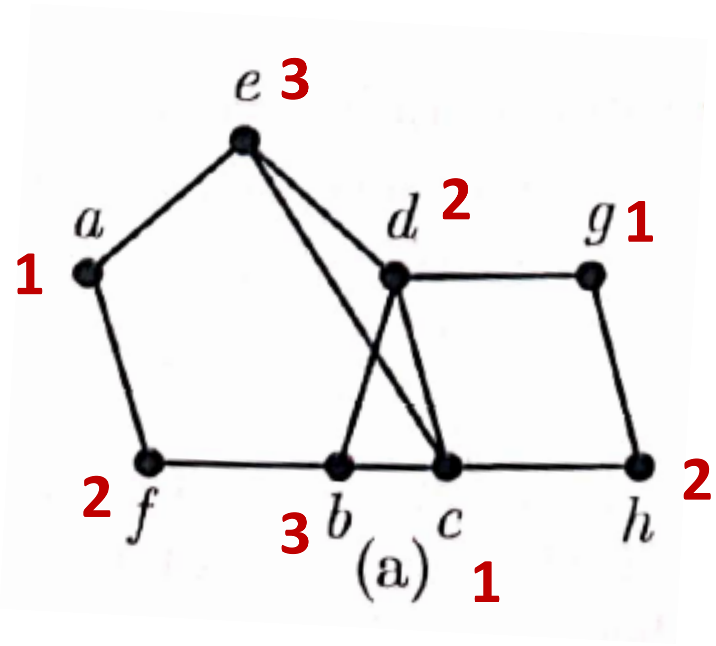
Algorithme (coloration maximale du degré de couleur)

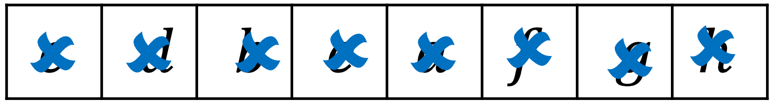
1. Trier les sommets dans l'ordre du plus grand degré au plus petit sur une liste *U* [liste non colorée]
2. Colorer le premier sommet *v* de *U* par 1; supprimer *v* de *U*.
3. Tant que *U* n'est pas vide; sélectionner le premier sommet disponible *w*
   Démarrer un compteur *j à* partir de 1.
   Vérifier uniquement si les sommets adjacents de *w* déjà colorés ont une valeur *j*. Attribuez à *w* celui qui manque ou ajoutez 1 à *j* si tous les nombres de la séquence sont rencontrés.
   Retirez ensuite *w* de *U*.
4. Tous les sommets ont été colorés.

Maximum Color-Degree Coloring

Appliquez l'algorithme de "coloration maximale du degré de couleur" aux éléments suivants.

Exemple

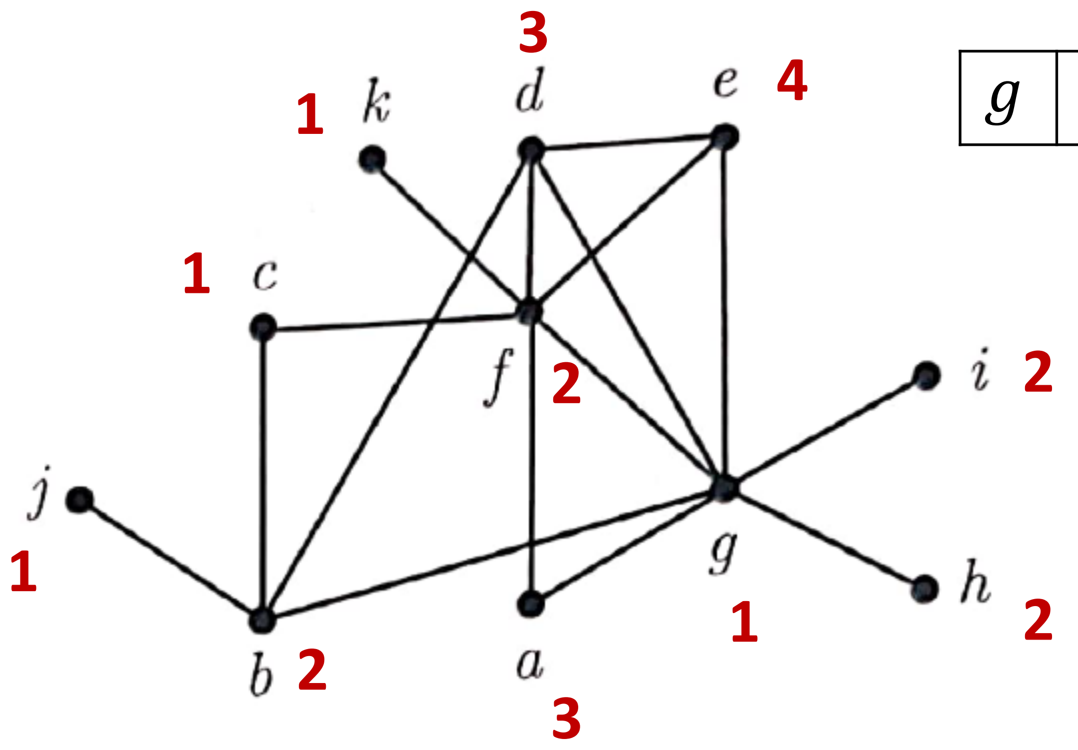




Maximum Color-Degree Coloring

Exemple

Trouvez une coloration des sommets du graphe suivant.



g	f	b	d	e	a	c	h	i	j	k

Plan

- Coloration des sommets et ensembles indépendants
- Coloration des arêtes
- Algorithmes
- Applications de la coloration de graphes

Applications de la coloration de graphes

- La coloration des graphes peut être utilisée pour résoudre plusieurs problèmes du monde réel.
- Cela est particulièrement le cas dans les problèmes où certains éléments doivent être séparés les uns des autres en raison des propriétés de base de ces éléments.

Concevoir un zoo

Exemple

Les zoos modernes permettent aux animaux de courir librement autant que possible. Cependant, les enclos sont encore nécessaires pour deux raisons principales. Tout d'abord, un enclos de base est nécessaire pour garder tous les animaux dans le zoo. Deuxièmement, comme certains animaux en trouvent d'autres assez savoureux, des enclos sont nécessaires pour séparer un prédateur de sa proie. La construction de l'enceinte étant une dépense importante, comment déterminer le moins d'enceintes nécessaires?

Applications de la coloration de graphes

- Une autre application utile de la coloration des graphes est la planification de réunions ou d'examens.
- Lorsqu'une entreprise, un organisme gouvernemental ou une université planifie des réunions, certaines personnes doivent être à plus d'une de ces réunions.
- Bien entendu, pour que cela se produise, les réunions auxquelles une personne donnée doit assister doivent avoir lieu à des moments différents.
- Si vous vous attendez à ce que les différents moments aient quelque chose à voir avec les différentes couleurs des sommets dans la partition de l'ensemble de sommets d'un graphe, vous pensez dans la bonne direction.

Planification des examens finaux

Exemple

Le département d'informatique compte huit membres du corps professoral, dont chacun enseigne 3 cours ce semestre. Leurs horaires sont indiqués dans le tableau.

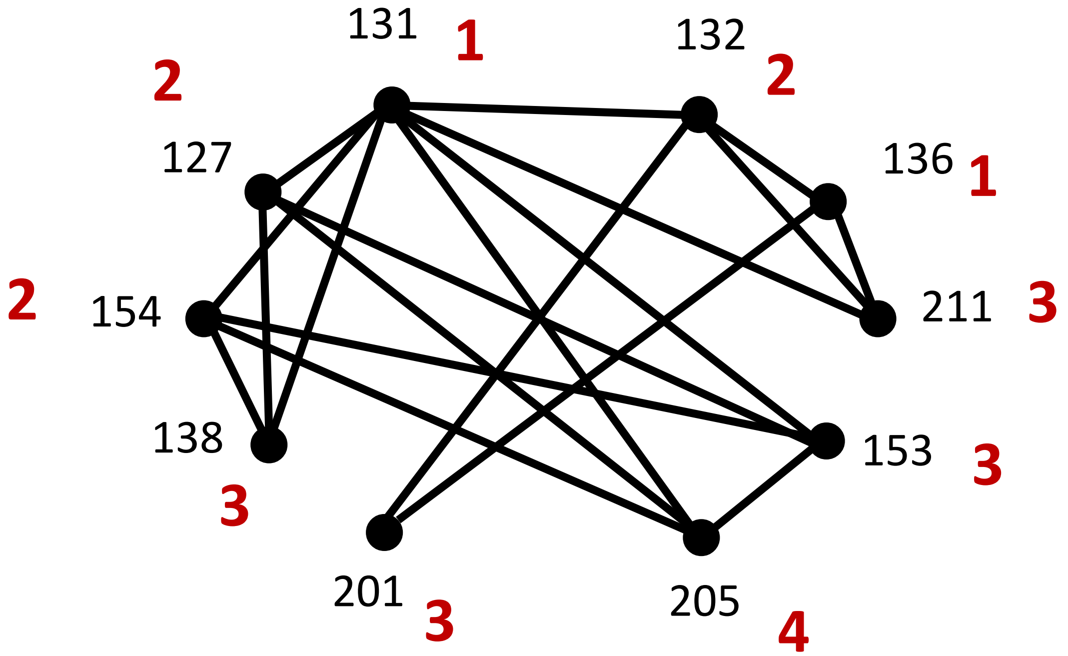
Lors de l'organisation des examens finaux, il a été décidé que chaque cours comportera un examen final du département de telle sorte que toutes les sections d'un cours donné auront leur finale en même temps.

Chaque professeur doit surveiller son propre examen. Il y a beaucoup d'espace de classe disponible, mais tout le monde aimerait terminer les examens le plus tôt possible afin de pouvoir se précipiter pour les vacances d'été !! Quel est le plus petit nombre de plages horaires pouvant être utilisées pour donner les examens?

Professeur	Cours enseignés
Antoun	132, 136, 211
Bassem	127, 131, 153
Dbouk	131, 132, 211
Ihab	127, 131, 205
Kobeissi	131, 138, 154
Siba	132, 136, 201
Yasser	127, 131, 138
Zeinab	153, 154, 205

Planification des examens finaux

SOLUTION



Créneau horaire	Examens	Professeurs
1	131, 136	Antoun, Bassem, Dbouk, Ihab, Kobeissi, Siba, Yasser
2	127, 132, 154	Antoun, Bassem, Dbouk, Ihab, Kobeissi, Siba, Yasser, Zeinab
3	138, 153, 201, 211	Antoun, Bassem, Dbouk, Kobeissi, Siba, Yasser, Zeinab
4	205	Ihab, Zeinab

Zeinab	153, 154, 205

131	127	132	153	154	205	136	138	211	201

Applications de la coloration de graphes

- En dernière application, nous mentionnons le **problème de l'horaire** (**timetabling problem**). C'est un problème de planification, mais d'un type quelque peu différent de celui indiqué dans les diapositives précédentes.
- Une situation typique dans le problème de l'horaire est qu'il y a des enseignants, dont chacun enseignera certaines classes.
- Une classe donnée peut se réunir plusieurs fois par semaine, comme tout étudiant le sait bien.
- Le problème est de planifier toutes les classes pour tous les enseignants en utilisant le nombre total minimum de périodes.
- Au début, ce problème peut ressembler beaucoup au problème de planification, mais il est assez différent.
- Tout d'abord, dans ce problème, nous n'avons pas affaire à un graphe mais à un multigraphe. De plus, le multigraphe est biparti, et nous résolvons le problème du calendrier en utilisant des colorations d’arêtes au lieu de colorations de sommets.

Problème d'horaire

Exemple

Supposons que les enseignant t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 doivent rencontrer les classes c_1, …, c_7, et que t_i doit rencontrer la classe c_j un total de w_{ij} fois par semaine.

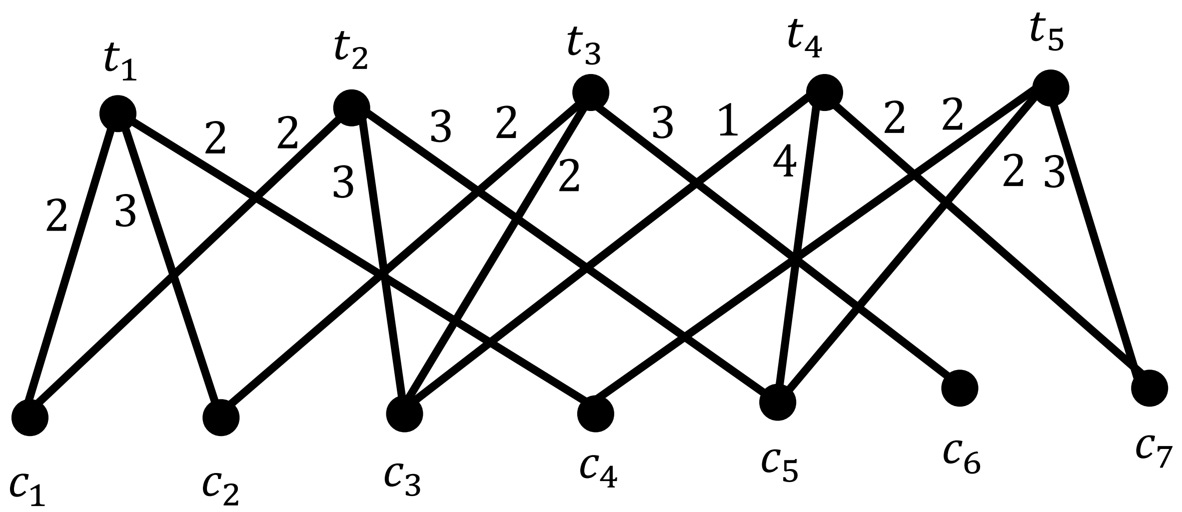
Notez que la classe c_j est un ensemble fixe d'étudiants qui sont dans les mêmes classes ensemble toute la journée. Nous représentons la situation avec un graphe biparti pondéré. Le poids $w_{i,j}$ sur une arête donnée correspond au nombre d'arêtes qu'il y aurait jointure t_i et c_j dans le multigraphe biparti associé.

Supposons que les réunions de classe requises soient telles qu'illustrées dans le graphe de la diapositive suivante.

Déterminez le nombre minimum de périodes par semaine qui doivent apparaître dans la grille horaire. Ensuite, déterminez un horaire de cours approprié.

Problème d'horaire

Exemple



	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
1	c_1	c_3	c_2	c_5	c_7
2	c_2	c_5	c_3	c_7	c_4
3	c_4	c_5	c_6	c_3	c_7
4	c_1	c_3	c_2	c_5	c_4
5	c_2	c_1	c_3	c_7	c_5
6	c_4	c_3	c_6	c_5	c_7
7	c_2	c_1	c_6	-	c_5
8	-	c_5	-	-	-
9	-	-	-	c_5	-