Théorie des Graphes

Université Libanaise
Faculté des Sciences
License Informatique
2ème année – S3

Arbres et graphes bipartis

Semaine 3

Plan

- Propriétés des arbres
- Arbres couvrants minimum
- Une caractérisation des graphes bipartis
- Correspondances et affectations de tâches

Propriétés des arbres
Question 1

Une **forêt** est un graphe dont les composants sont des arbres. Il existe six forêts non isomorphes qui ont quatre sommets. Trouver les.

Propriétés des arbres
Question 2

Dessinez tous les arbres non isomorphes ayant cinq sommets ou moins.

Propriétés des arbres
Question 3

Supposons qu'un arbre ait 50 sommets. Combien d'arêtes a-t-il?

Propriétés des arbres
Question 4

Déterminez tous les arbres qui sont des graphes réguliers et expliquez pourquoi il n'y en a pas plus que ceux que vous avez trouvés.

Propriétés des arbres
Question 5

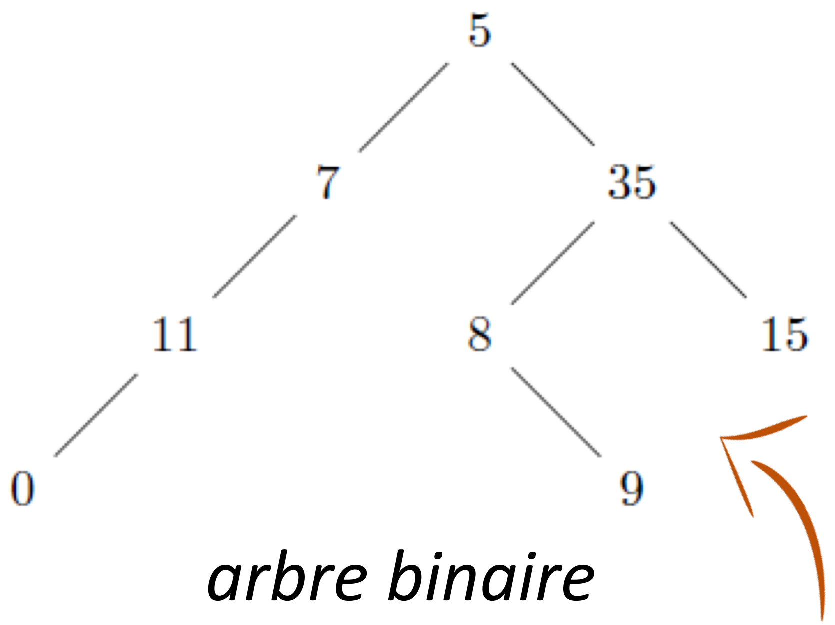
Un arbre enraciné ou arborescence est appelé **binaire** si chaque sommet a au plus deux enfants.

Un arbre binaire **complet** est un arbre binaire fini dans lequel chaque niveau, sauf peut-être le dernier, est complètement rempli, et tous les sommets sont aussi à gauche que possible

Un arbre binaire fini est appelé **plein** si chaque sommet, à l'exception de chaque feuille, a exactement deux enfants.

Combien de sommets y a-t-il dans un arbre binaire complet de hauteur k ? Combien de feuilles y a-t-il?

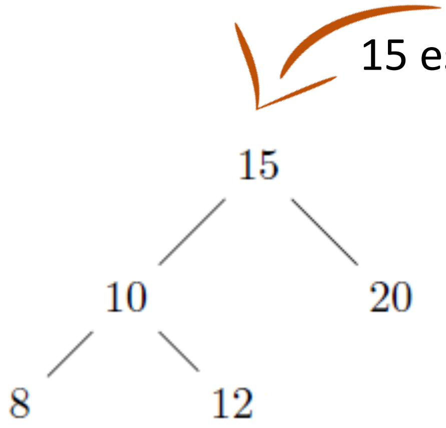
Propriétés des arbres
Question 5



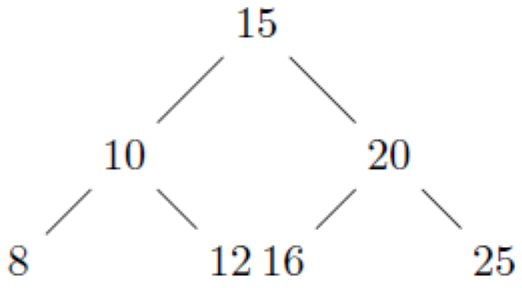
arbre binaire

hauteur = 3

15 est la racine



arbre binaire complet



arbre binaire plein

hauteur d’un arbre = la longueur du plus longue chaine élémentaire vers une feuille à partir de la racine

Propriétés des arbres
Question 6

Vérifiez, en utilisant le théorème suivant, que 3,3,2,2,1,1,1,1 est la séquence de degrés d'un arbre. Puis construisez trois arbres non isomorphes avec cette séquence de degrés.

Théorème. Étant donné une séquence S de n entiers positifs $d_1, d_2, \dots, d_n$ tels que $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ et $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2(n-1)$, alors il existe un arbre dont la séquence de degrés est S.

Propriétés des arbres
Question 7

Tracez un graphe non connexe avec la séquence de degrés de la question précédente: 3,3,2,2,1,1,1,1. *Astuce* : l'une des composantes n'est pas un arbre.

Plan

- Propriétés des arbres
- Arbres couvrants minimum
- Une caractérisation des graphes bipartis
- Correspondances et affectations de tâches

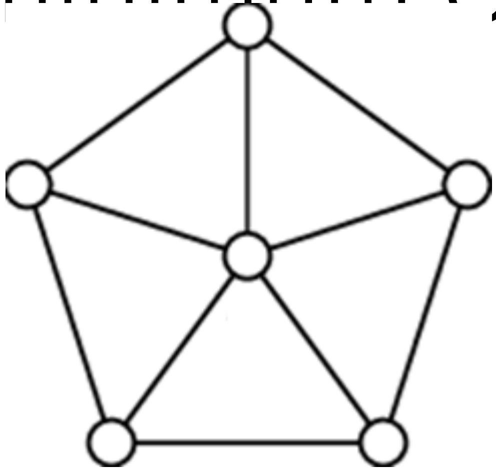
Arbre couvrant minimum Question 8

Trouvez tous les arbres couvrant non isomorphes pour les graphes suivants:

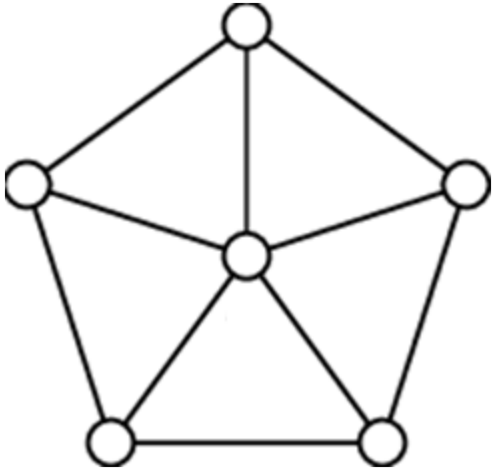
1. La roue $W_{1,5}$
2. $K_{3,3}$

Arbre couvrant minimum Questio

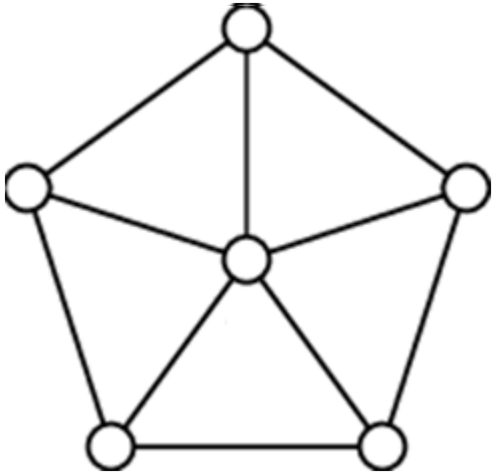
SOLUTION



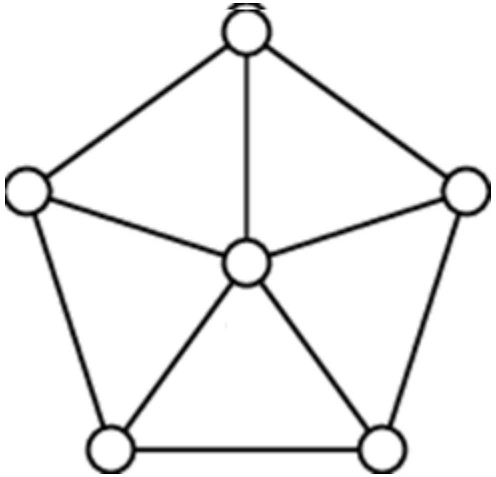
10 arêtes, nous voulons 5, supprimons 5



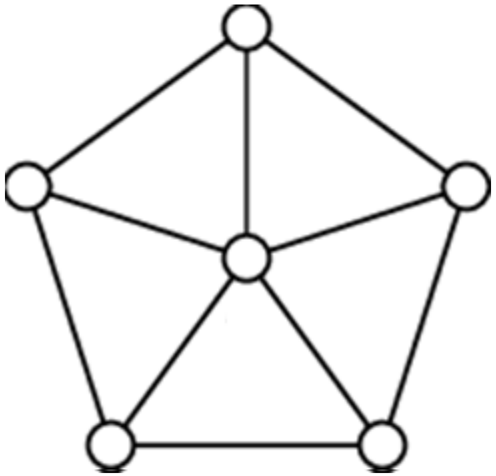
P_6



$K_1 + K_1 + K_1$
$+K_1 + K_2$



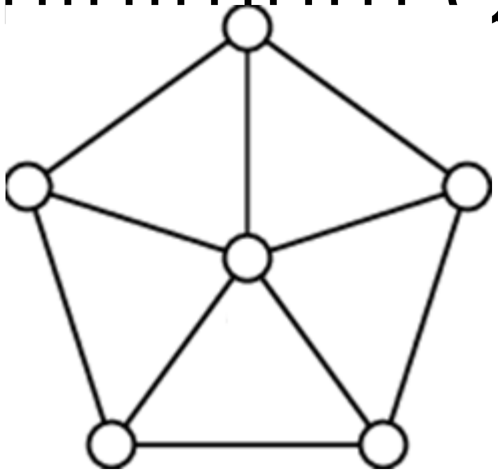
$K_1 + K_1$
$+K_1 + \overline{K_3}$



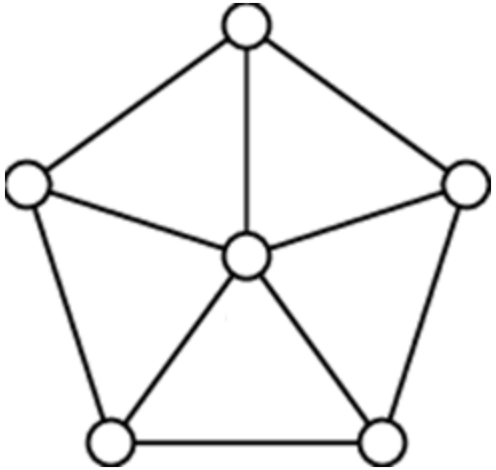
$\overline{K_2} + K_1 +$
$K_1 + \overline{K_2}$

Arbre couvrant minimum Question

SOLUTION



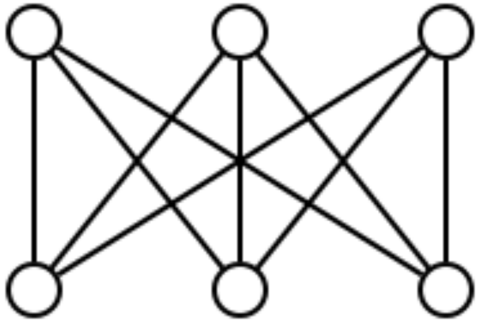
10 arêtes, nous voulons 5, supprimons 5



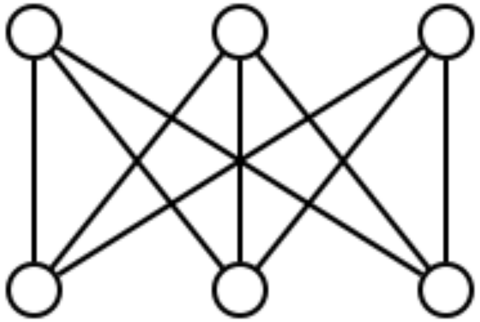
P_5 avec une arête suspendue attaché au sommet du milieu du chemin

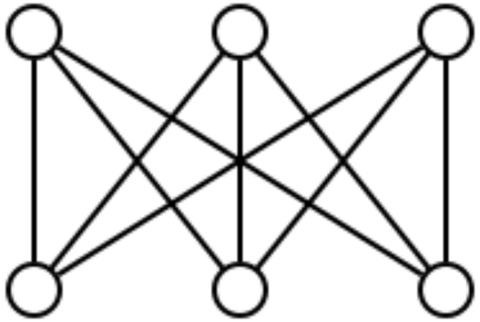
Arbre couvrant minimum Question

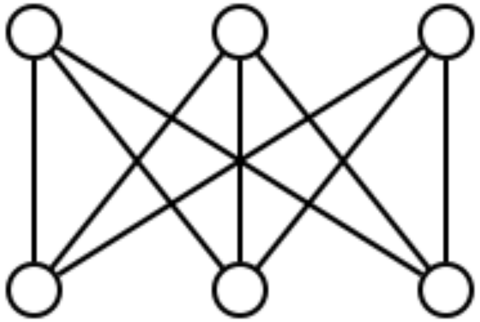
SOLUTION



9 arêtes, nous voulons 5, supprimons 4







P_6

$\overline{K_2} + K_1 + K_1 + \overline{K_2}$

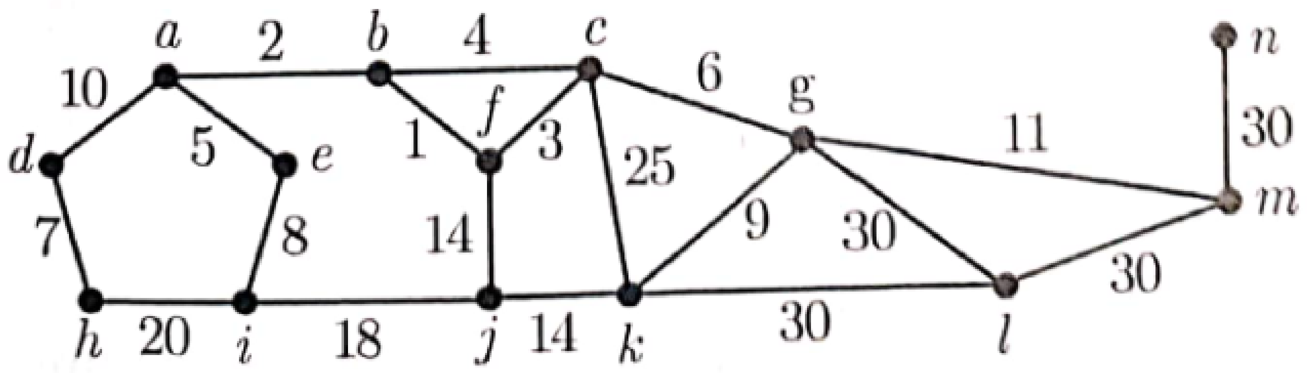
P_5 avec une arête suspendue attaché au sommet du milieu du chemin

Arbre couvrant minimum Question 9

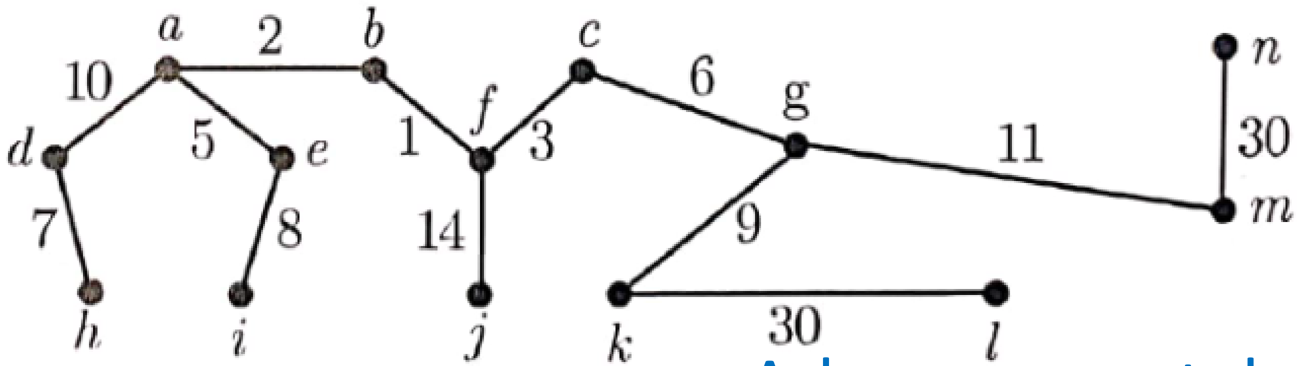
Déterminez la déficience pour chaque sommet de l'arbre couvrant pour le graphe G (illustré sur la diapositive suivante). Vérifiez ensuite que votre résultat est cohérent avec le théorème suivant.

Théorème. Soit G un graphe connexe sur n sommets et q arêtes. Alors, la somme des déficiences des sommets de tout arbre couvrant de G est $2(q - n + 1)$.

Arbre couvrant minimum Questi



Graphe G



Arbre couvrant de G

Vertex	Deficiency
a	
b	
c	
d	
e	
f	
g	
h	
i	
j	
k	
l	
m	
n	

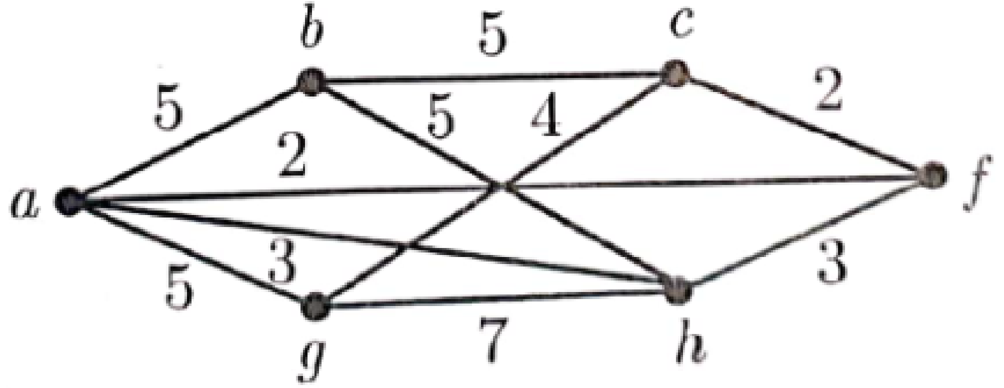
Arbre couvrant minimum Question 10

Décrire un algorithme pour trouver un arbre couvrant de poids maximal d'un graphe connexe.

Arbre couvrant minimum
Question 11

(a) Répertoriez les arêtes de l’arbre couvrant dans l’ordre dans lequel elles seraient sélectionnées si l’algorithme de Kruskal était utilisé. Ensuite, dessinez l'arbre couvrant minimum résultant.

(b) Répertoriez les arêtes de l’arbre couvrant dans l’ordre dans lequel elles seraient sélectionnées si l’algorithme de Prim était utilisé en commençant au sommet g. Ensuite, dessinez l'arbre couvrant résultant.



Arbr… ant minimum

REVISITÉ

Algorithme de Kruskal

1. $S = \emptyset$
2. Soit e l'arête suivante de la liste triée L pour laquelle $e \notin S$ et le sous-graphe induit par l'arête $\langle S \cup \{e\} \rangle$ est acyclique. Soit $S = S \cup \{e\}$.
3. Si $|S| = n - 1$, arrêter et retourner S. Sinon, revenez à l'étape 2 et continuez le long de la liste L.

Arbre couvrant minimum
Question 11

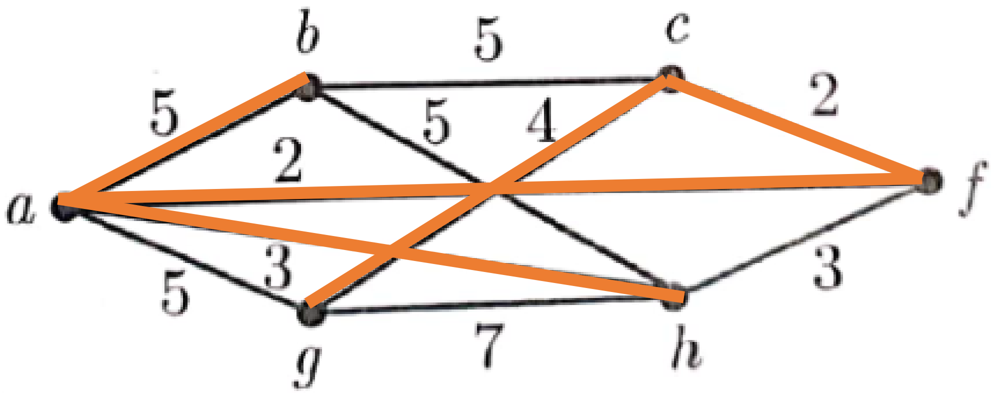
SOLUTION

Trier les arêtes selon l'ordre croissant des poids

{af, cf, ah, fh, cg, ab, ag, bc, bh, gh}

✓ ✓ ✓ ✗ ✓ ✓

G a 10 arêtes et 6 sommets, donc un arbre couvrant pour G a 5 arêtes.



Arbr[illegible]ant minimum

REVISITÉ

Algorithme de Prim

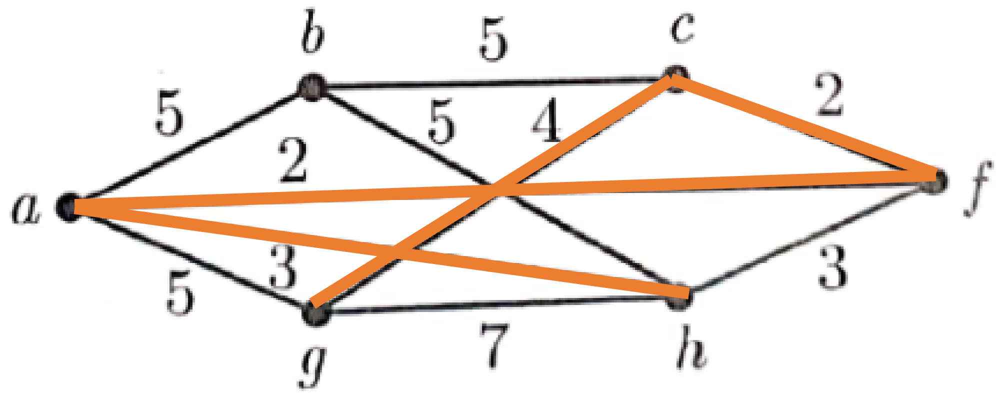
1. Sélectionnez un sommet v et soit let $V(T) = \{v\}, E(T) = \emptyset$.
2. Parmi tous all $u \notin V(T)$, soit l $e = uw$ une arête de poids minimum joignant u à w, où $w \in V(T)$. Soit $V(T) = V(T) \cup \{u\}$ et $E(T) = E(T) \cup \{uw\}$.
3. Si $|\mathrm{E}(T)| = n - 1$ arrêtez et affichez $E(T)$. Sinon, revenez à l'étape 2 et ajoutez un autre sommet à l'arbre.

Arbre couvrant minimum
Question 11

SOLUTION

G a 10 arêtes et 6 sommets, donc un arbre couvrant pour G a 5 arêtes.

- $v = \text{g},$
- $V(T) = \{g, c, f, a, h, b\}$
- $E(T) = \{cg, cf, af, ah, ab\}$



Plan

- Propriétés des arbres
- Arbres couvrants minimum
- Une caractérisation des graphes bipartis
- Correspondances et affectations de tâches

Une caractérisation des graphes bipartis Question 12

Dessinez les sept graphes bipartis (connexes et non connexes) qui ont quatre sommets.

Une caractérisation des graphes bipartis Question 13

Un graphe est **semi-régulier biparti** si les sommets de la partie V_1 ont tous un degré s et les sommets de la partie V_2 ont tous un degré t.

Construire un graphe biparti semi-régulier avec des parties V_1 et V_2 d'ordres 6 et 8, respectivement, et des degrés 4 et 3, respectivement.

Donc, 6 sommets dans V_1 chacun avec le degré 4, 8 sommets dans V_2 chacun avec le degré 3.

Existe-t-il des valeurs de paires de degrés possibles s et t et qui peuvent être utilisées ici?

Une caractérisation des graphes bi
Question 13

SOLUTION