Théorie des Graphes

Université Libanaise

Faculté des Sciences

License Informatique

2ème année – S3

Syllabus

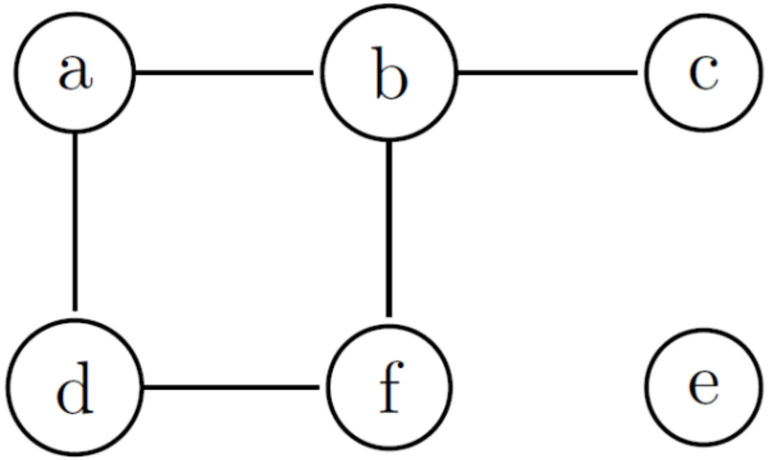
1. Concepts introductifs
2. Introduction aux graphes et à leurs utilisations
3. Arbres et graphes bipartis
4. Distance et connexité
5. Graphes Eulériens et Hamiltoniens
6. Coloration des graphes
7. Matrices
8. Algorithmes sur les graphes
9. Graphes planaires
10. Digraphes et réseaux

Introduction aux graphes et à leurs utilisations

Semaine 2

Avant de commencer

- Nos graphes sont composés de points, dont certains sont reliés par des segments.



Plan

- Graphes comme modèles
- Sous-graphes et types de graphes
- Graphes isomorphes
- Opérations sur les graphes

Graphes comme modèles

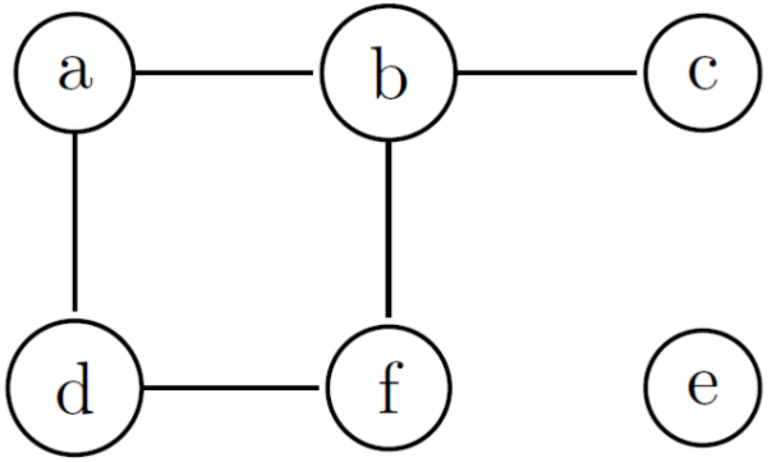
- Graphes
- Modèles mathématiques
- Exemples d'application
  - Chimie
  - Affaires : entrepôts / magasins de détail
  - Distance entre deux villes
  - Acheminement des camions de crème glacée
  - Problème de vendeur itinérant
  - Planification des examens
  - Un modèle d'affectation

Graphes comme modèles
Graphes

- Un graphe est une représentation mathématique d'une relation.

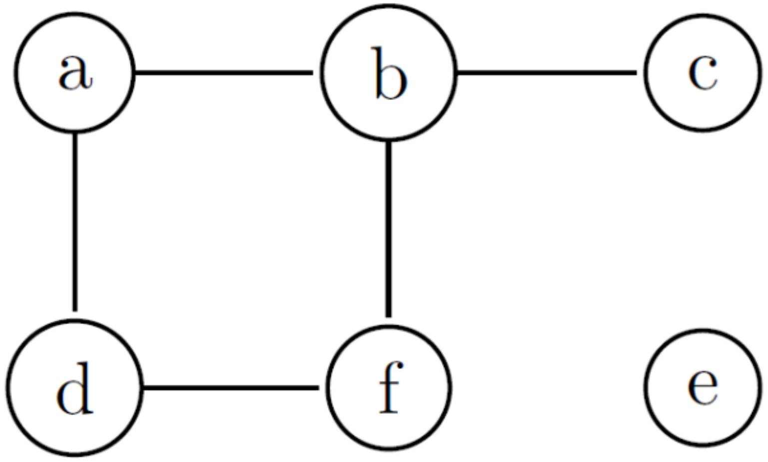
- Un **graphe** G se compose de 2 ensembles:

1. Un ensemble fini non vide V de **sommets**, et
2. Un ensemble fini E **d'arêtes** constitué de paires non ordonnées de sommets distincts de V.



Graphes comme modèles
Graphes

- Si $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ est un ensemble de n **sommets**, l'ensemble d'**arêtes** $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ est constitué de m sous-ensembles à 2 éléments de V (noté $v_i v_j$).
- La cardinalité n de $V(\mathrm{G})$ est de l'**ordre** de G.
- La cardinalité m de $\mathrm{E}(\mathrm{G})$ est la **taille** de G.

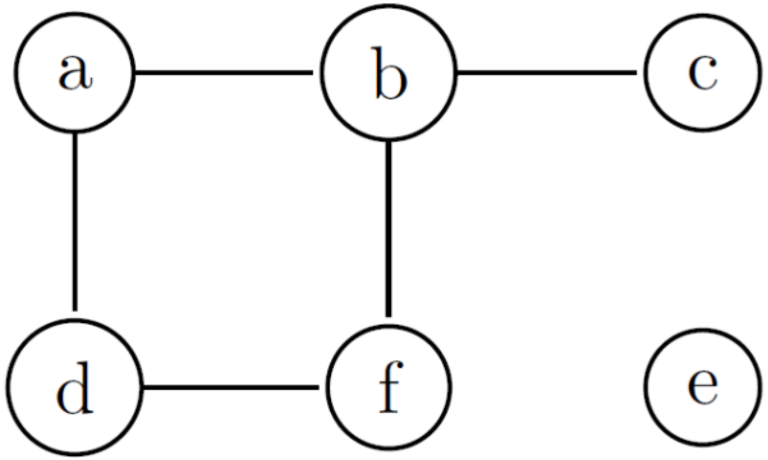


Question rapide

Lister l'ensemble de sommets et l'ensemble d'arêtes de G

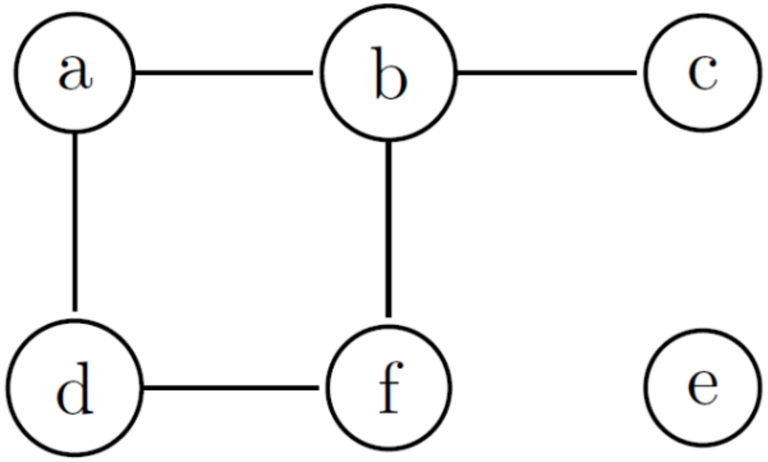
Graphes comme modèles
Graphes

- Une paire de sommets v_i et v_j dans V sont **adjacents** si $v_i v_j \in E(G)$ ($v_i v_j$ est une arête).
- Sinon, v_i et v_j sont **non adjacents**.



Graphes comme modèles
Graphes

- Le **degré** $\boldsymbol{deg(v)}$ (ou $\boldsymbol{deg_G(v)}$) d'un sommet v est le nombre de sommets adjacents à v.
- L'arête $v_i v_j$ est **incidente** avec v_i et v_j.



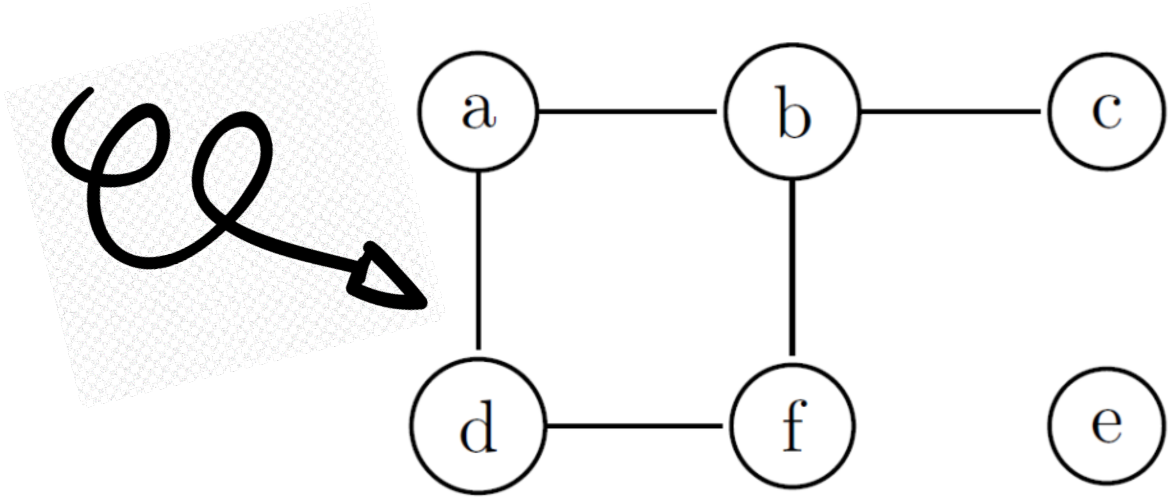
Question rapide
Lister les degrés des sommets de G

Graphes comme modèles
Graphes

Question rapide

Supposons que les sommets de G représentent un groupe d'étudiants et supposons que 2 sommets soient adjacents si les personnes correspondantes ont travaillé ensemble sur des devoirs.

- Qui a travaillé sur les devoirs avec le plus grand nombre de collègues?
- Qui n'a jamais travaillé sur les devoirs d'aucun de ses collègues?

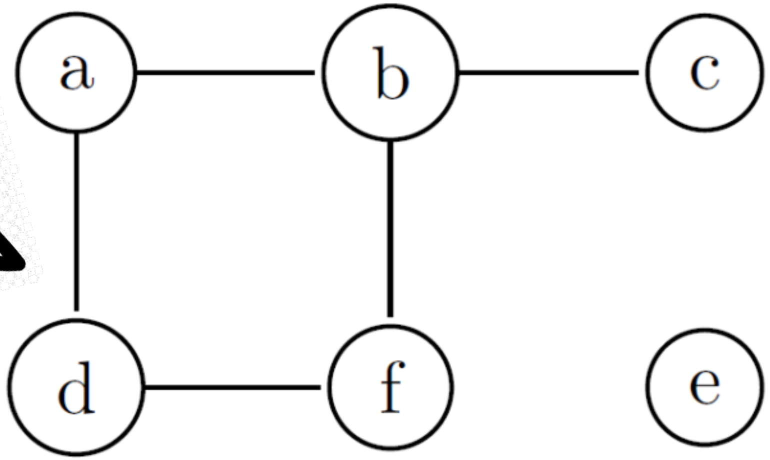


Graphes comme modèles Graphes

Question rapide

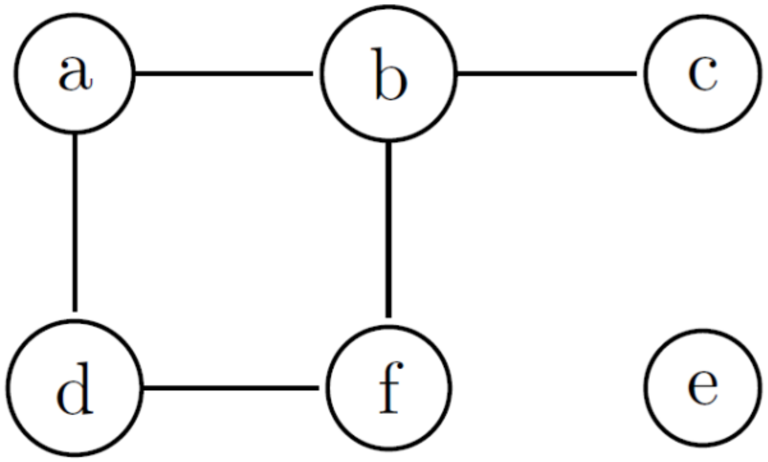
Supposons que les sommets de G représentent les ordinateurs d'un laboratoire et qu'une arête indique que les ordinateurs correspondants peuvent communiquer directement.

- En supposant que les ordinateurs ont tous la même vitesse et la même capacité de mémoire, quel ordinateur serait le plus approprié comme serveur de réseau? (un tel ordinateur devrait pouvoir communiquer directement avec autant d'autres ordinateurs que possible.)
- Quel ordinateur est complètement isolé du serveur réseau?



Graphes comme modèles Graphes

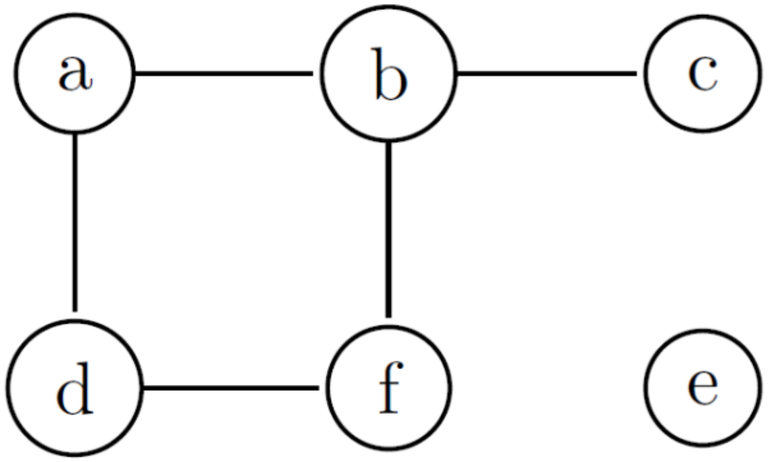
- Un sommet de degré zéro est appelé un **sommet isolé**. (e est un sommet isolé)
- Un sommet de degré un est appelé un **sommet de fin** (ou une **feuille** lorsque le graphe a une structure «arborescente») (c est un sommet de fin)



Graphes comme modèles Graphes

Les degrés des sommets d'un graphe jouent un rôle important dans de nombreux problèmes:

- Le **degré minimum** est noté $\delta(G)$,
- Le **degré maximum** est noté $\Delta(G)$
- Si tous les sommets ont le même degré, alors $\delta(G) = \Delta(G)$, et le graphe est dit **régulier**.
- Un graphe **r-régulier** a tous les sommets de degré r.



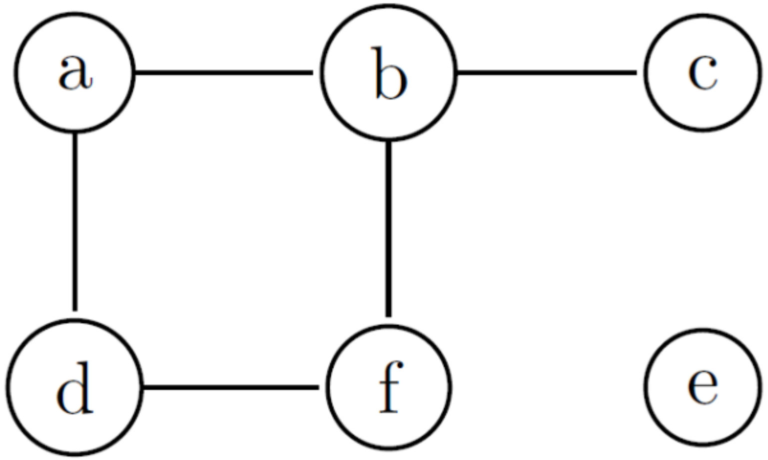
Leonhard Euler

- 1707 - 1783
- Mathématicien suisse
- L'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps avec 886 articles et livres.
- Il était totalement aveugle lorsqu'il a produit la plupart de ces papiers.
- Nombreux théorèmes et formules avec le nom Euler (prononcé en anglais" oiler").
- Les théoriciens des graphes se réfèrent souvent à Euler comme le père de la théorie des graphes.

Graphes comme modèles
Graphes

Théorème (Euler): Dans tout graphe G, la somme des degrés est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

Corollaire: Dans tout graphe G, la somme des degrés des sommets est un entier pair non négatif.



Graphes comme modèles
Graphes

- Les sommets peuvent représenter des personnes, des ordinateurs, des villes ou à peu près n'importe quoi!
- Une arête montre quels sommets sont liés.

- Les graphes sont utilisés de différentes manières:
  - Les chimistes étudient les molécules
  - Les écologistes s'assurent que 2 sites toxiques voisins ne contiennent pas de produits chimiques dangereux lorsqu'ils sont mélangés
  - Les entreprises font le suivi des entrepôts
  - Les urbanistes analysent la circulation

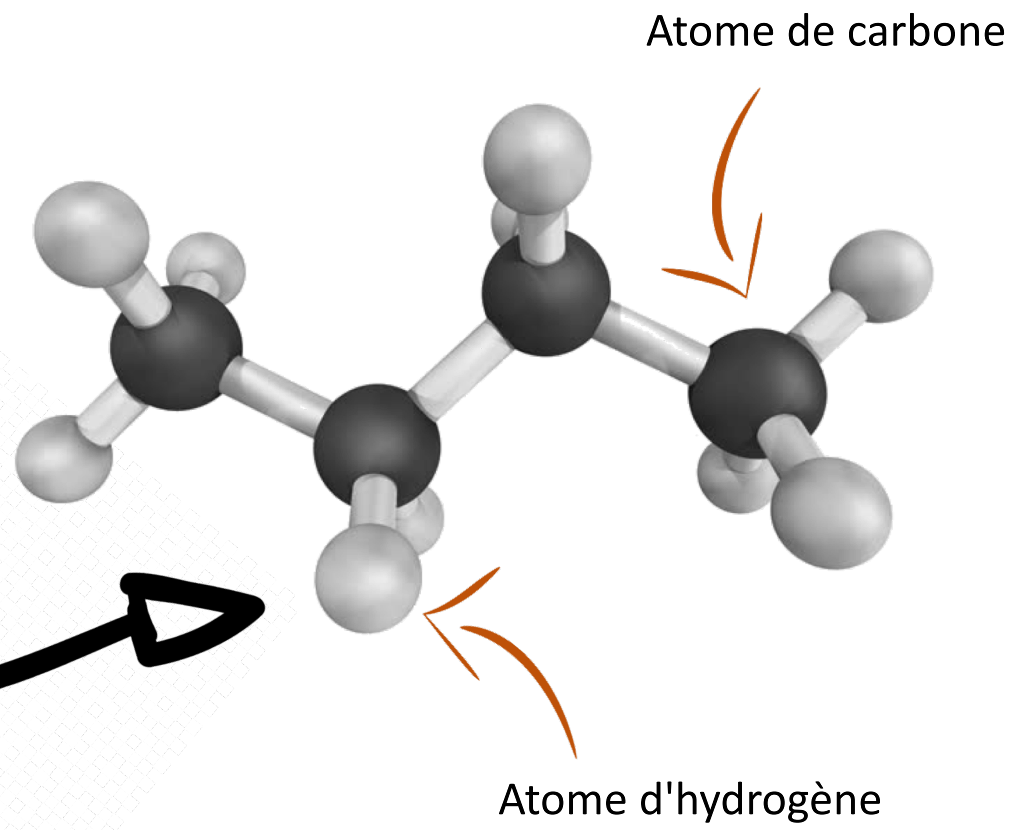
Graphes comme modèles
Modèles mathématiques

- Les modèles mathématiques sont utilisés pour abstraire et simplifier des situations du monde réel.

- La théorie des graphes résume et simplifie également les problèmes du monde réel afin que nous puissions mieux comprendre les relations entre les choses.
- Utiliser ○ des sommets pour représenter des personnes, des ordinateurs, des villes, etc
- et ——— des arêtes pour montrer quels sommets sont liés.

Graphes comme modèles
Exemples d'application: Chimie

- Etude des hydrocarbures - Butane - molécules composées d'atomes d'hydrogène et de carbone.



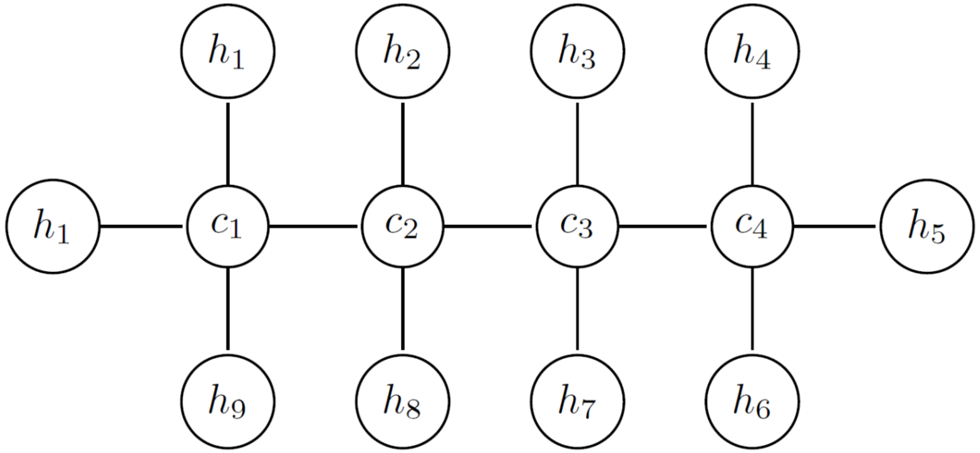
Question rapide

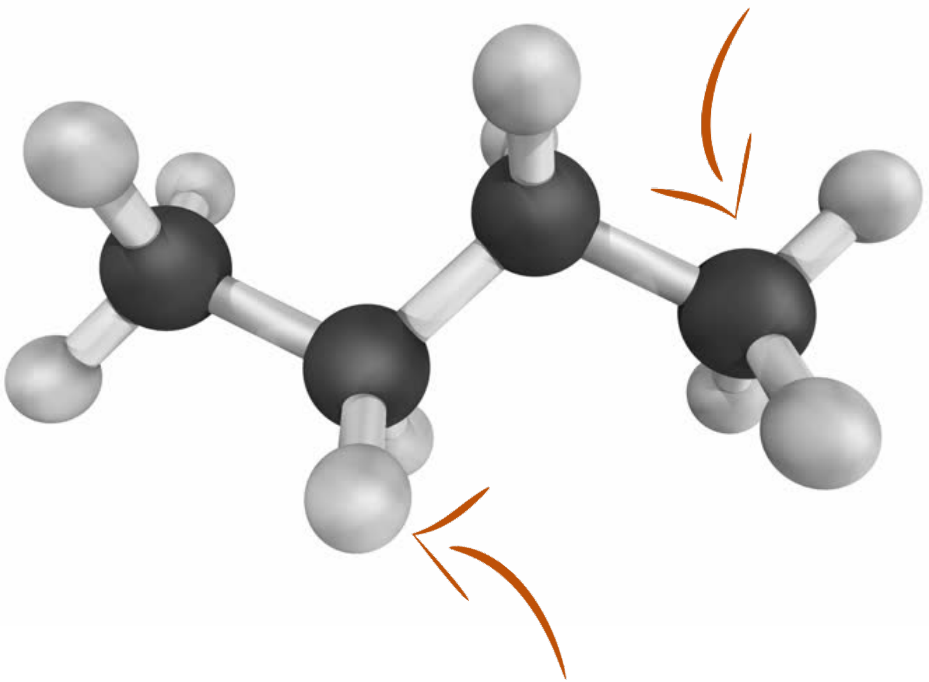
Obtenez l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes

Graphes comme modèles

Exemples d'application: Chimie

- $V(G) = \{c_1, c_2, c_3, c_4, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$
- $E(G) = \{c_1h_1,\ c_1c_2,\ c_1h_9,\ c_1h_{10},\ c_2h_2,\ c_2h_8,\ c_2c_3, c_3h_3,\ c_3h_7,\ c_3c_4,\ c_4h_4, c_4h_5,\ c_4h_6\}$

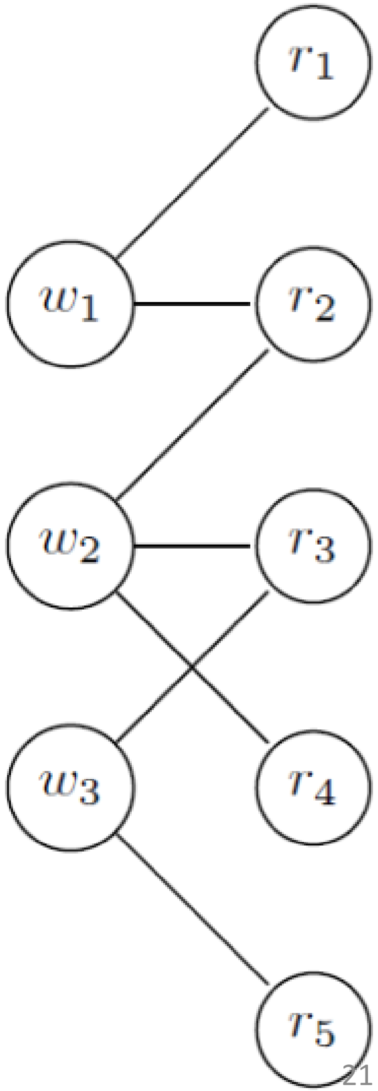




Graphes comme modèles

Exemples d'application: Affaires : entrepôts / magasins de détail

- $V = \{w_1, w_2, w_3, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$ représente 3 entrepôts et 5 magasins de détail
- $E = \{w_1r_1, w_1r_2, w_2r_2, w_2r_3, w_2r_4, w_3r_3, w_3r_5\}$ représente la relation de chaque entrepôt à chaque magasin de détail.



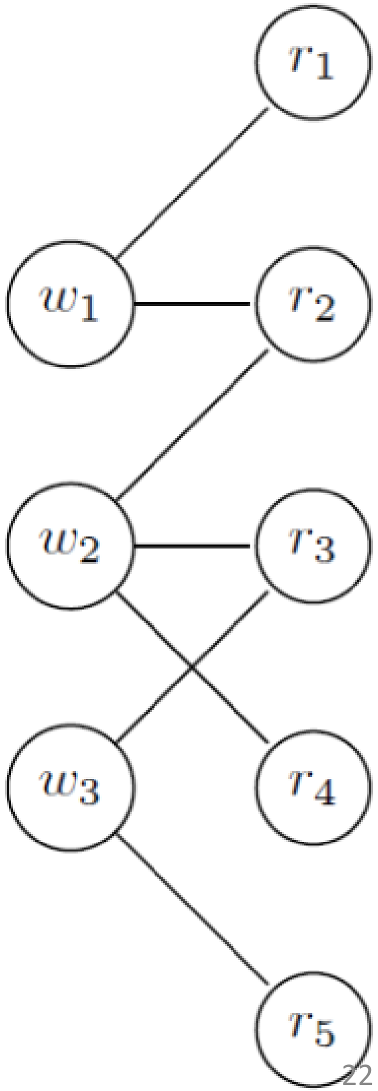
Question rapide

- Quel entrepôt dessert le plus de magasins de détail?
- Si le magasin r_2 avait besoin de marchandise mais que w_2 était en rupture de stock, quel entrepôt pourrait être en mesure de desservir r_2?

Graphes comme modèles

Exemples d'application: Affaires : entrepôts / magasins de détail

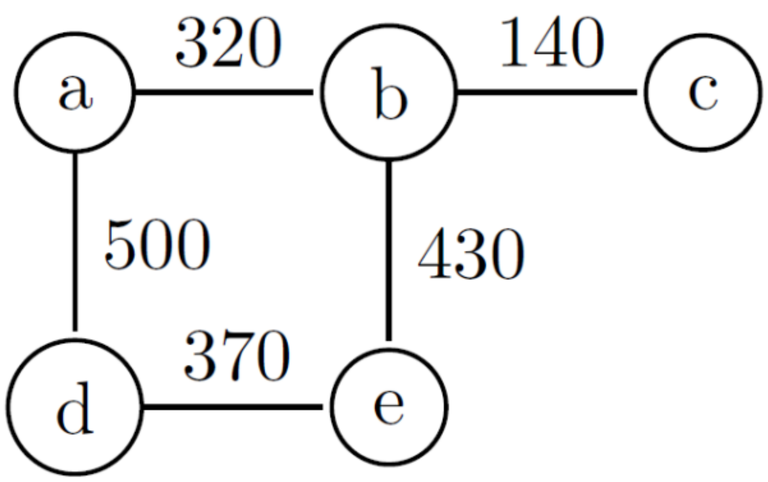
- Nous pouvons diviser V en 2 sous-ensembles disjoints (non superposés): $\{w_1, w_2, w_3\}$ et $\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$, de sorte que chaque arête contient exactement un sommet de chaque ensemble.
- De tels graphes sont appelés **graphes bipartis** car ils ont 2 parties: 2 ensembles disjoints qui partitionnent V.



Graphes comme modèles

Exemples d'application: Distance entre deux villes

- $V = \{a, b, c, d, e\}$ représente 5 villes
- $E = \{ab, ad, bc, be, de\}$ représentant les vols directs des compagnies aériennes. Le nombre sur chaque arête représente les distances parcourues par chaque vol.
- C'est ce qu'on appelle un **graphe pondéré**.

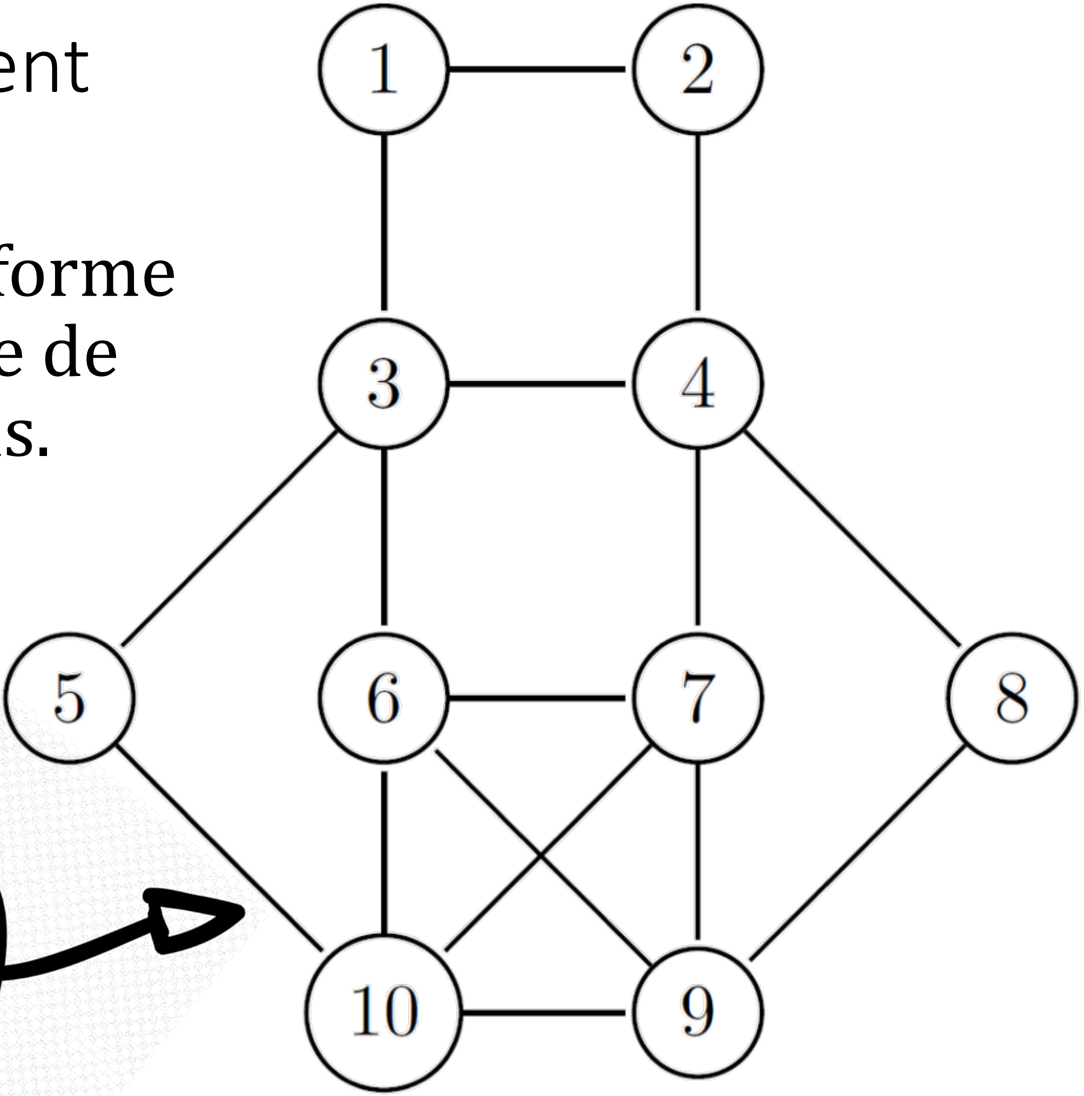


Question rapide

Trouvez **le plus court chemin** pour aller de d à c.

Graphes comme modèles
Exemples d'application: Acheminement des camions de crème glacée

- G représente les rues d'une ville sous forme d'arêtes et les intersections sous forme de sommets. 16 rues avec 10 intersections.



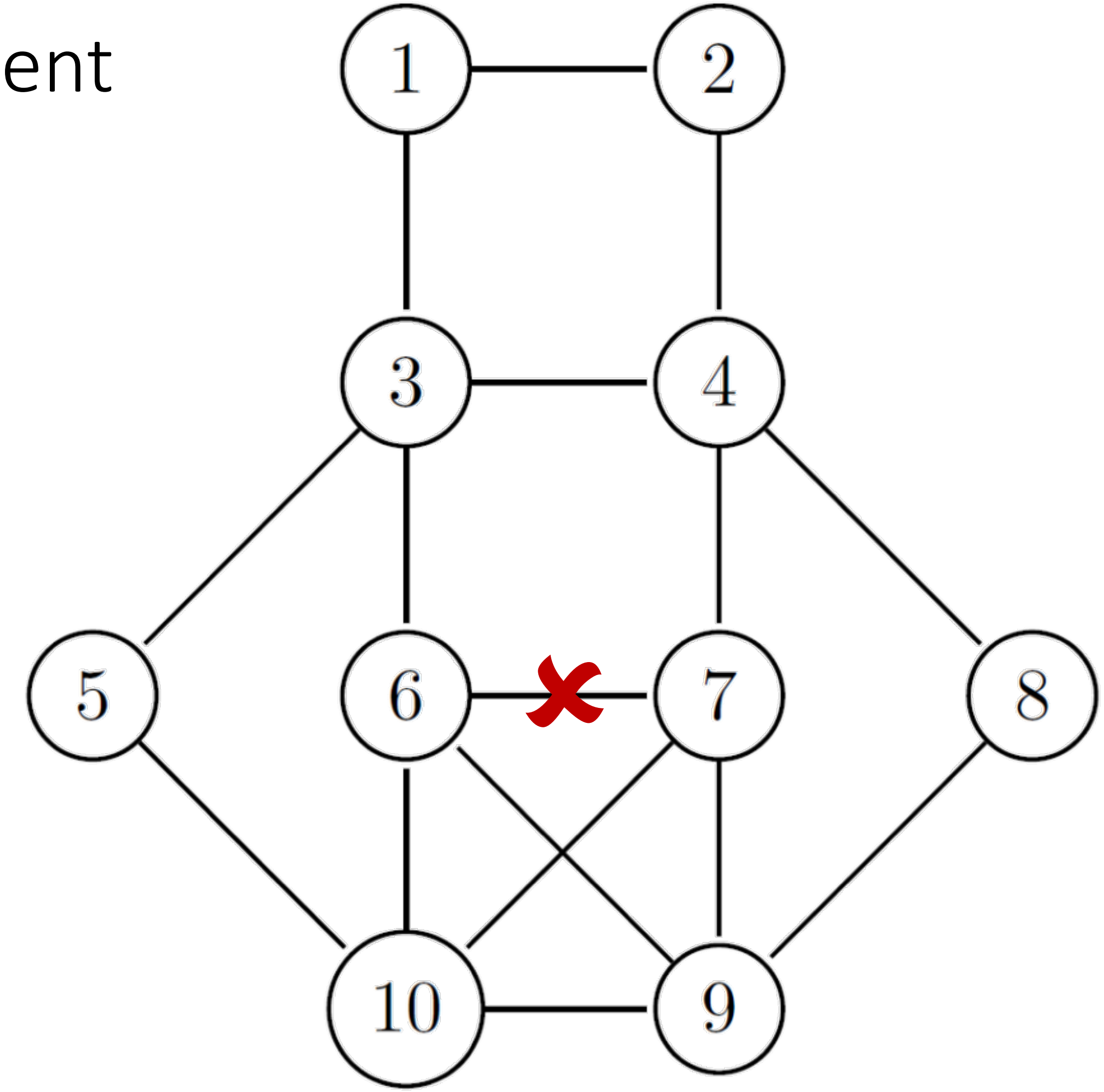
Question rapide

Si un conducteur commence au sommet 5, le conducteur peut-il parcourir chaque rue exactement une fois et revenir au sommet 5?

Graphes comme modèles

Exemples d'application: Acheminement des camions de crème glacée

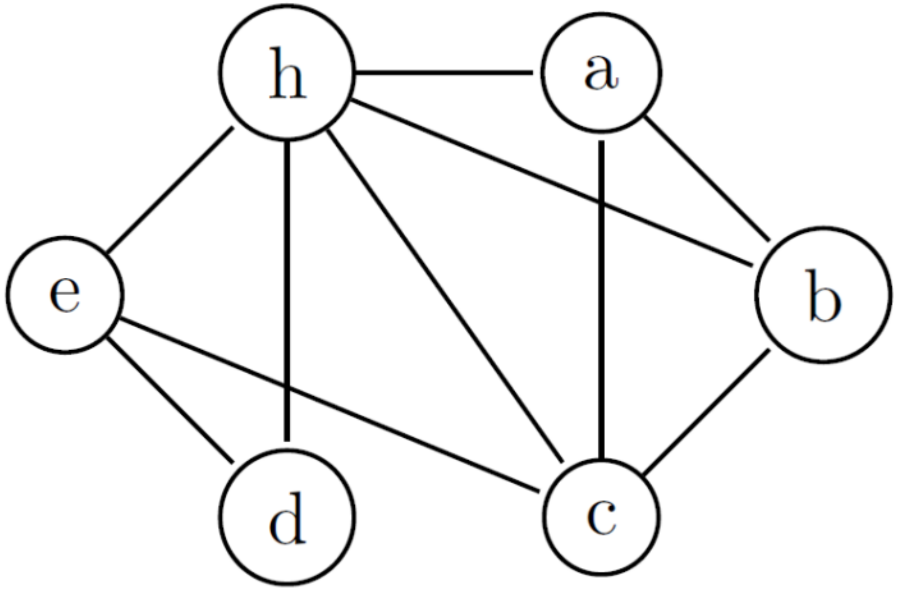
- Si certaines arêtes (rues) n'étaient pas encore construites entre des sommets particuliers (intersections), l'itinéraire souhaité ne serait pas possible!
- S'il manquait la rue joignant 6 à 7, le vendeur aurait besoin de parcourir certaines rues plus d'une fois!
- Un problème lié aux **Graphes Eulériens**.



Graphes comme modèles

Exemples d'application: Problème de vendeur itinérant

- Supposons que vous souhaitiez voyager dans 5 villes et rentrer chez vous. Les itinéraires directs entre les villes (sommets) sont indiqués par des arêtes où h est votre ville natale.

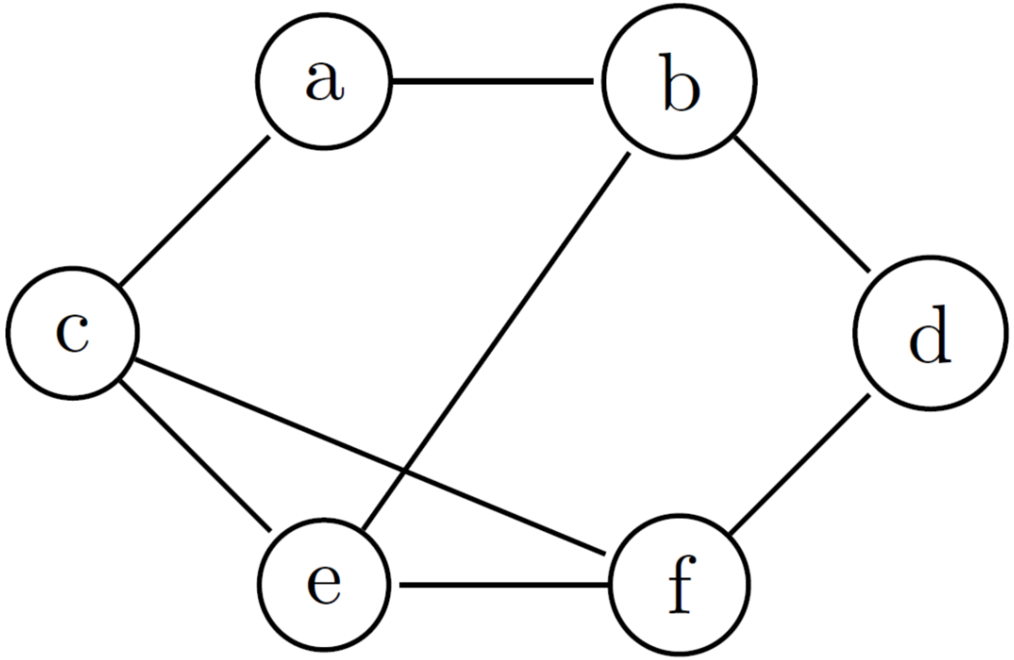


Question rapide

Comment pouvez-vous accomplir cette mission si vous devez visiter chaque ville une seule fois?

Graphes comme modèles
Exemples d'application: Planification des examens

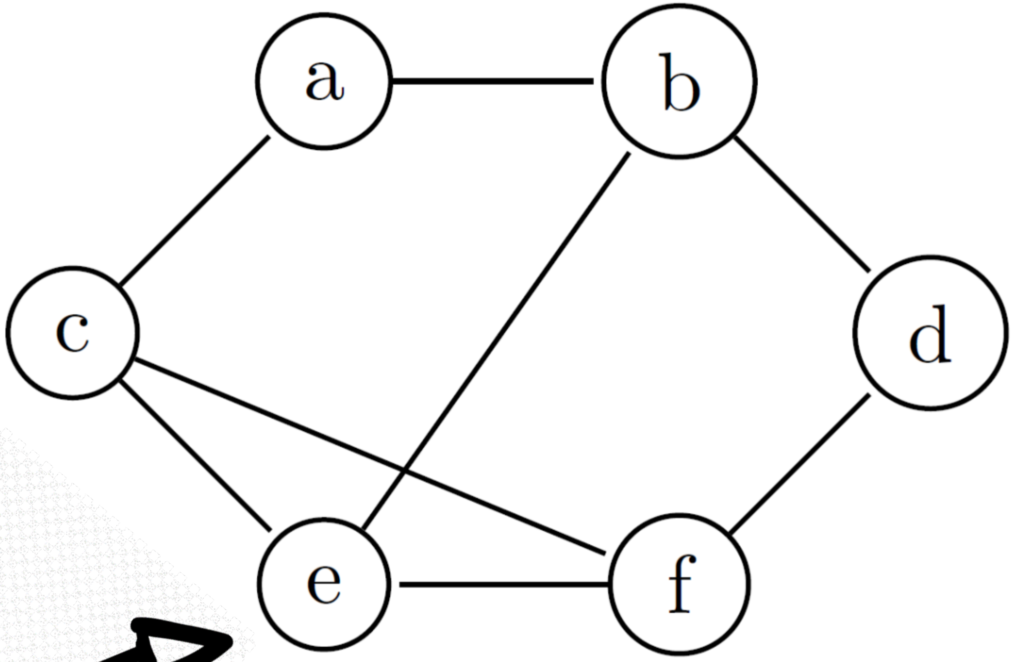
- Lors de la planification des examens finaux, il faut s'assurer qu'aucun étudiant n'a de conflit.
- Les sommets représentent les cours. Rejoignez 2 sommets si les 2 cours ont au moins un élève en commun.
- Différentes couleurs peuvent représenter différents créneaux horaires.



Graphes comme modèles

Exemples d'application: Planification des examens

- $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ soit 6 courses.
- Ceci est un problème de **coloration de graphe**.



Question rapide

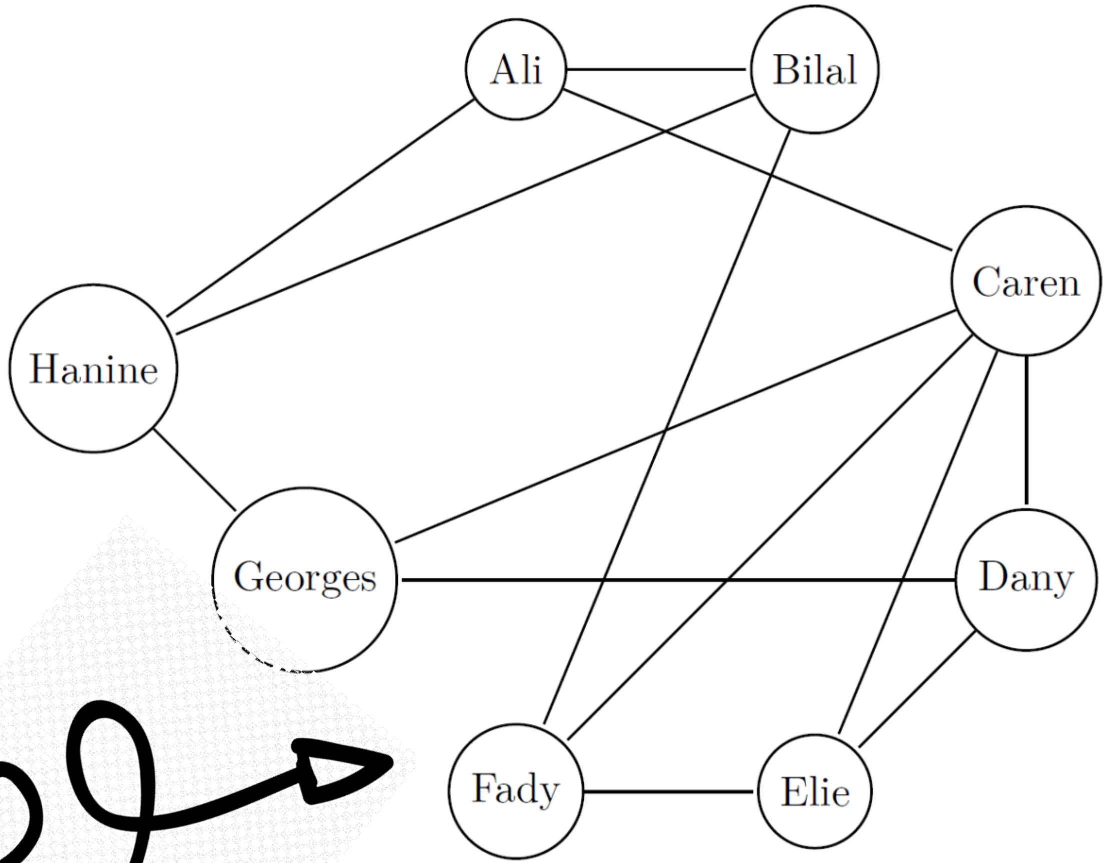
La planification des examens équivaut à attribuer une couleur à chaque sommet tout en garantissant que les cours reliés par une arête ont des couleurs différentes.

Pouvez-vous le faire?

Graphes comme modèles

Exemples d'application: Un modèle d'affectation

- Considérons un graphe dont les sommets représentent les personnes, où une arête relie 2 personnes qui sont des amis.
- Ces personnes prévoient de faire un long trajet en bus et les sièges sont attribués par paires.
- Le directeur de voyages aimerait jumeler des amis pour qu'ils passent un agréable voyage.



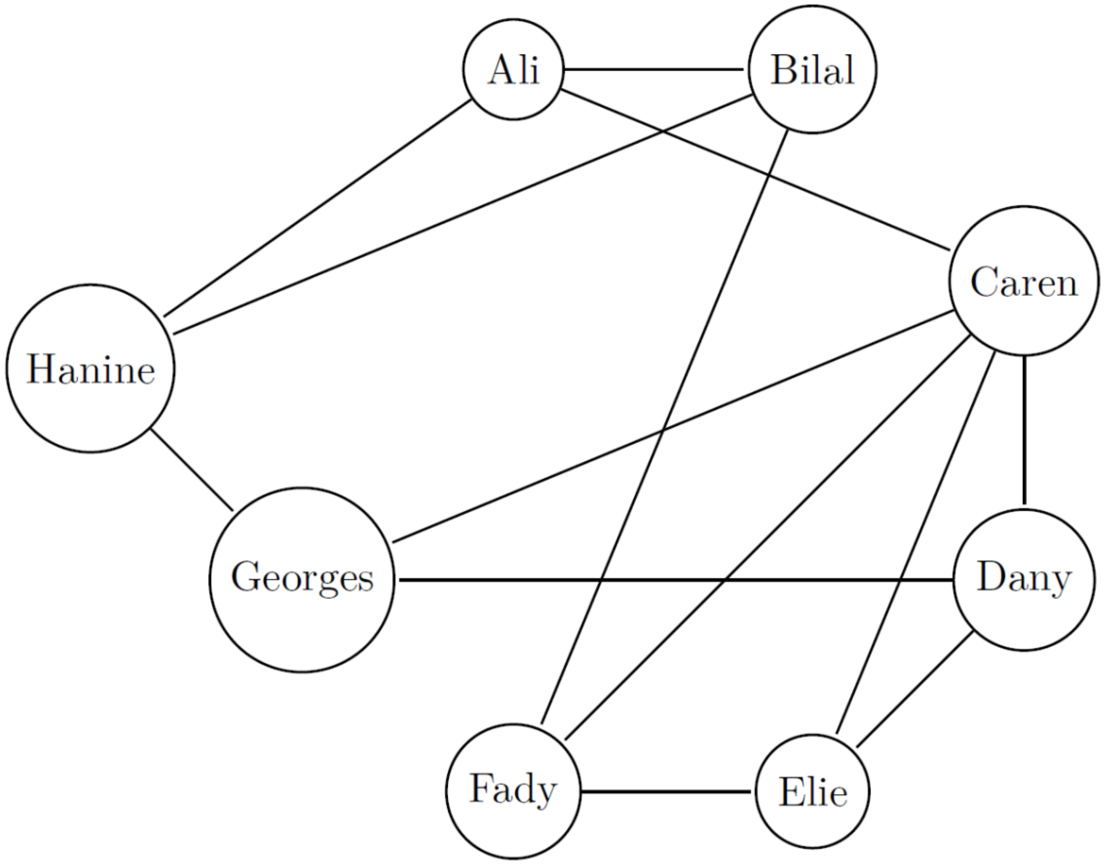
Question rapide

Comment allez-vous les asseoir?

Graphes comme modèles

Exemples d'application: Un modèle d'affectation

- $V = \{Ali, Bilal, Caren, Dany, Elie, Fady, Geoges, Hanine\}$
- Si le nombre de sommets est impair, alors aucun appariement n'est satisfaisant.
- Si le nombre est pair, il peut y avoir des conditions de contiguïté qui rendent les appariements impossibles.
- C'est un problème de **couplage** ou **appariement (graph matching).**



Plan

- Graphes comme modèles
- Sous-graphes et types de graphes
- Graphes isomorphes
- Opérations sur les graphes

Sous-graphes et types de graphes
Plan

- Faire une longue marche
- Sous-Graphes
- Types de graphes importants

Sous-graphes et types de graphes
Faire une longue marche

- Étant donné 2 sommets, u et v, nous définissons une **chaîne $\boldsymbol{u - v}$** (**walk**) comme
  - une séquence alternée de sommets et d'arêtes commençant par u et se terminant par v de telle sorte que les sommets et arêtes consécutifs soient incidents.
  - en pratique, nous listons les arêtes.
- Le nombre d'arêtes dans une chaîne est sa **longueur**.
  - (les arêtes peuvent être répétées)
- Si aucune arête n'est répétée, un chaîne s'appelle un **chaîne simple** (**trail**).
  - (les sommets peuvent être répétés).
- Si la chaîne simple commence et se termine au même sommet, c'est-à-dire si elle est **fermée**, nous l'appelons un **circuit.**

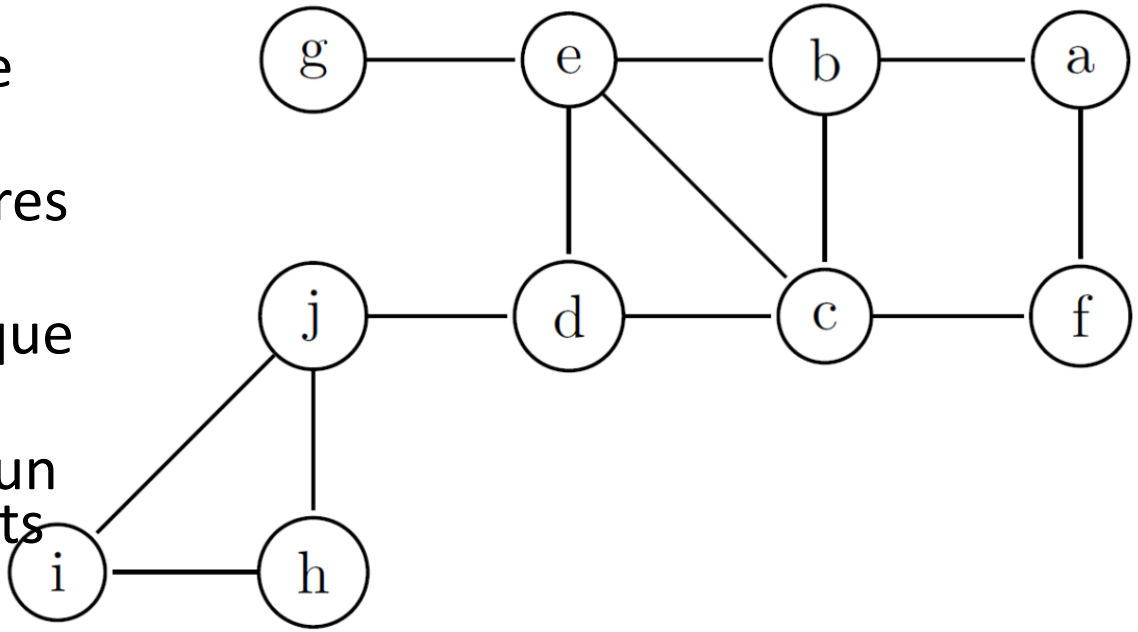
Sous-graphes et types de graphes
Faire une longue marche

- Une chaîne dans laquelle aucun sommet n'est répété est appelée **chaîne élémentaire (path)**.
- Une chaîne élémentaire qui joint les sommets u et v est appelée **chaîne élémentaire $\boldsymbol{u - v}$**.
- Une chaîne élémentaire est également une chaîne simple
  - (une arête ne peut pas être répétée si les 2 sommets de cette arête ne sont pas répétés).
- Une chaîne élémentaire fermée est un **cycle**.

Sous-graphes et types de graphes
Faire une longue marche

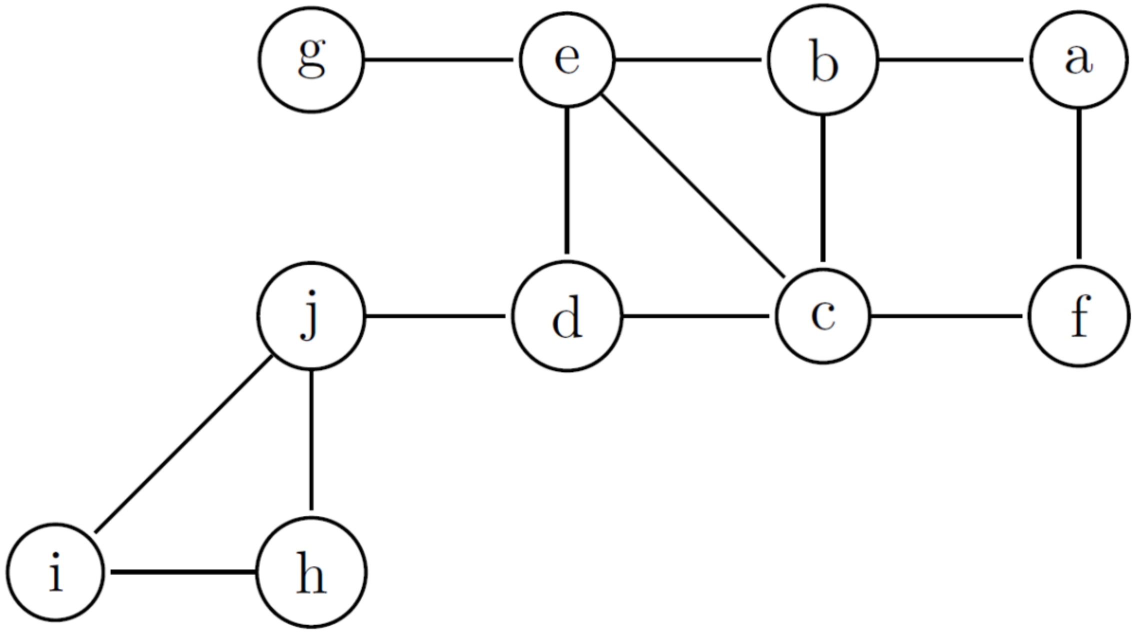
Exercice

1. Trouvez une chaîne qui n'est pas simple. (une arête se répète)
2. Trouvez une chaîne simple mais pas élémentaire. (un sommet se répète)
3. Trouvez cinq chaînes élémentaires $b - d$.
4. Déterminez la longueur de chaque chaîne de la partie 3.
5. Trouvez un circuit qui n'est pas un cycle. (peut répéter des sommets mais pas des arêtes)
6. Trouvez tous les cycles distincts qui sont présents.



Sous-graphes et types de graphes
Faire une longue marche

- Un graphe est **connexe** si pour chaque 2 sommets u et v, il y a une chaîne élémentaire $u - v$ les joignant. Sinon, il est **non connexe**.
- Une **chaîne élémentaire géodésique** entre u et v est un chaîne élémentaire $u - v$ de longueur minimale.
- Il peut y avoir plusieurs chaînes élémentaires géodésiques $u - v$.
- Les chaînes élémentaires géodésiques sont également appelées les **plus courts chemins** (**shortest paths**).

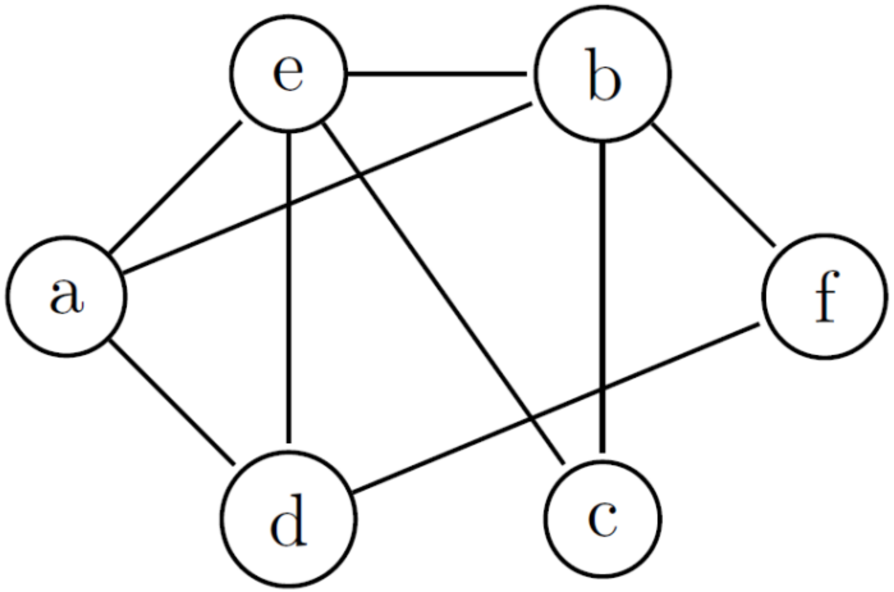


Sous-graphes et types de graphes
Sous-graphes

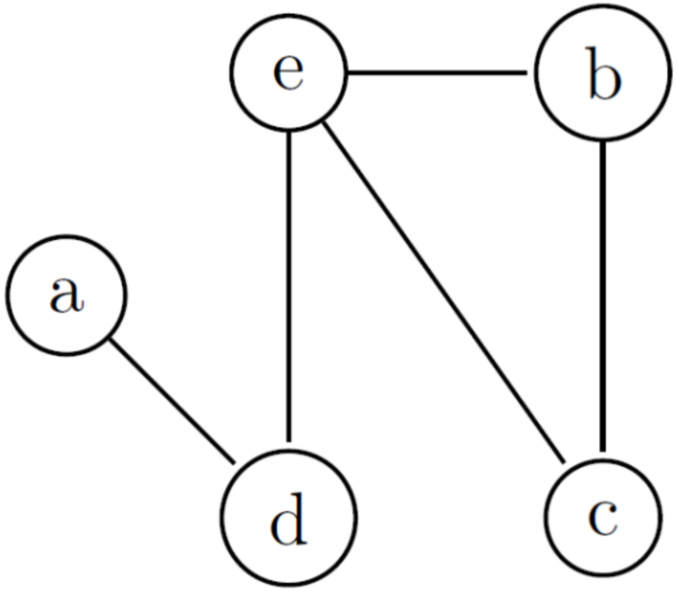
- Soit G un graphe avec $V(G)$ et $E(G)$.
- H est un **sous-graphe** de G si
  - $V(H)$ et $E(H)$ sont des sous-ensembles de $V(G)$ et $E(G)$ respectivement, et
  - pour chaque arête $e = uv \in E(H)$, u et v sont tous deux dans $V(H)$.
- Obtenez H de G en supprimant des arêtes et / ou des sommets de G.
- Nous appelons G un **supergraphe** de H.

Sous-graphes et types de graphes
Sous-graphes

- Exemple



G

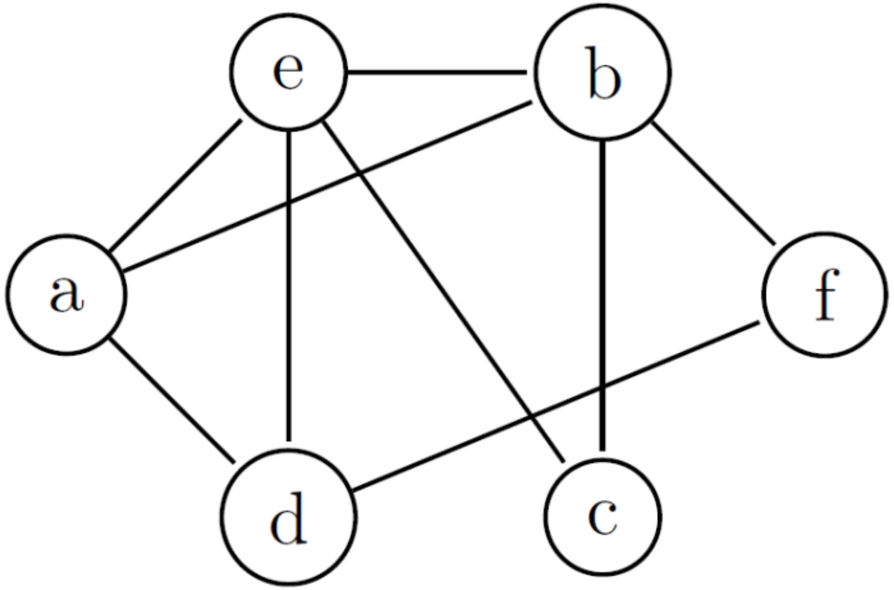


H

Sous-graphes et types de graphes
Faire une longue marche

Exercice

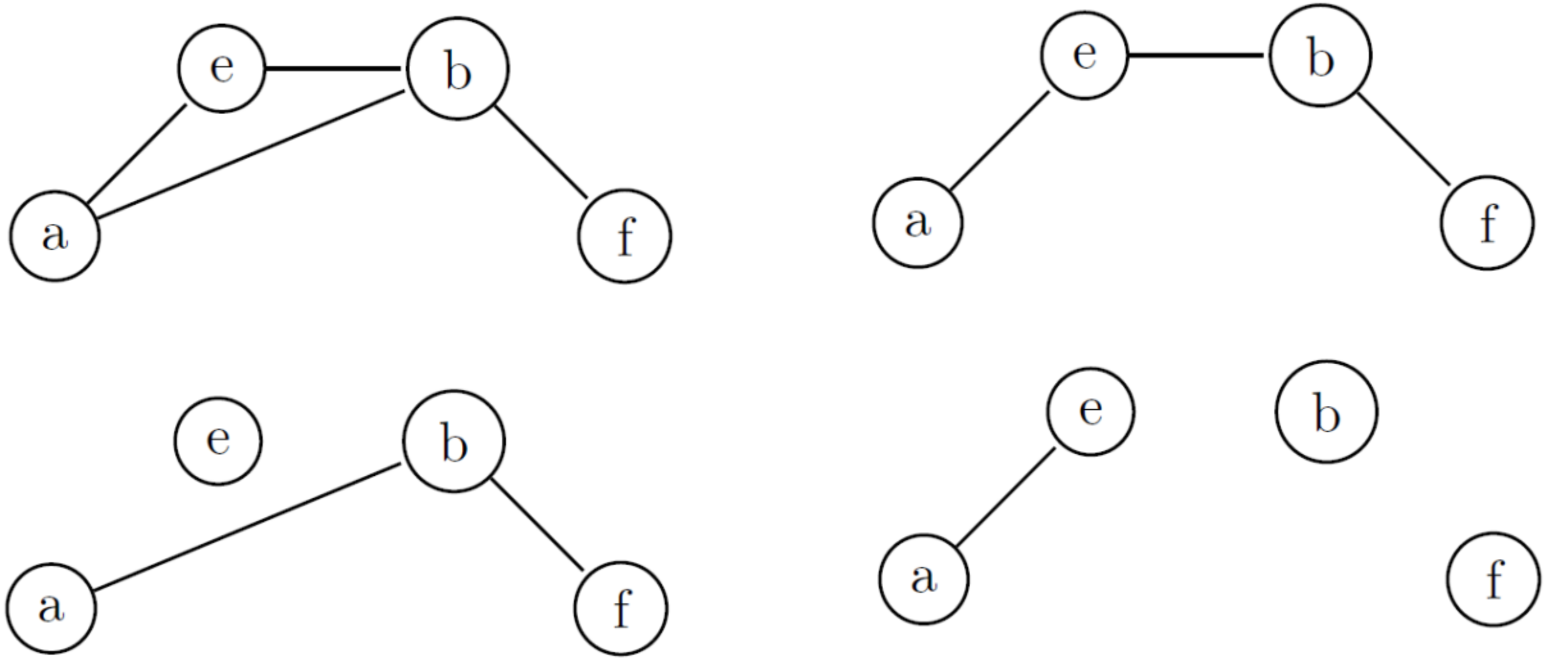
- Dessine tous les sous-graphes de G qui utilisent l'ensemble de sommets $\{a, b, e, f\}$



Sous-graphes et types de graphes
Faire une longue marche

solution

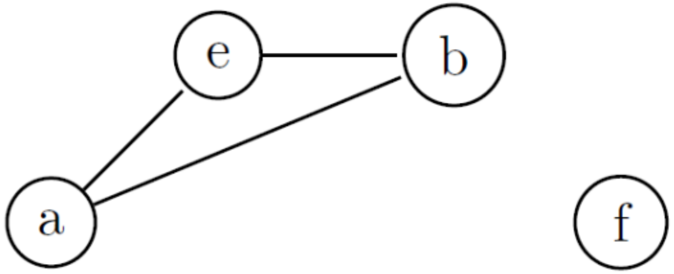
- Il y a 16 sous-graphes!

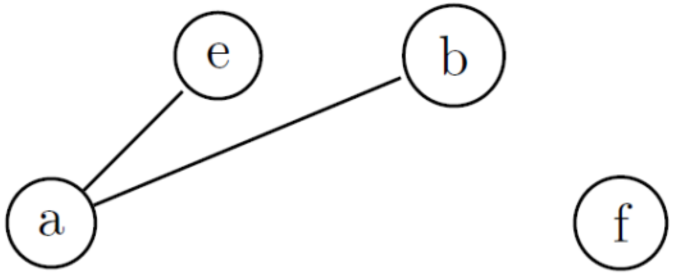


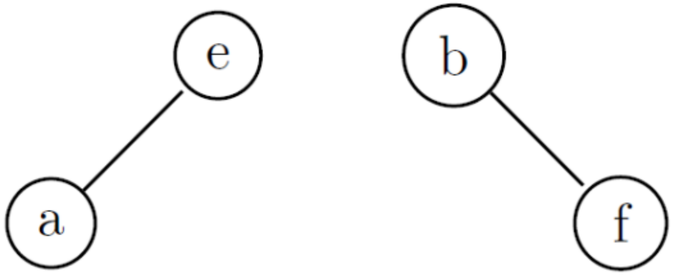
Sous-graphes et types de graphes
Faire une longue marche

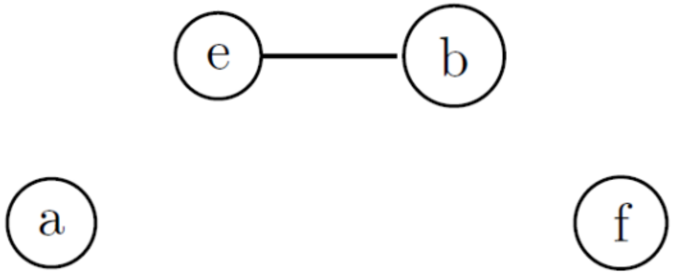
- Il y a 16 sous-graphes!

solution





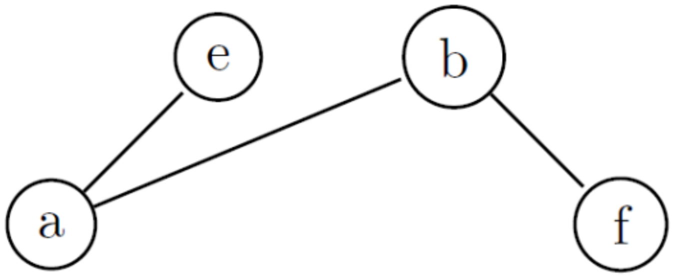


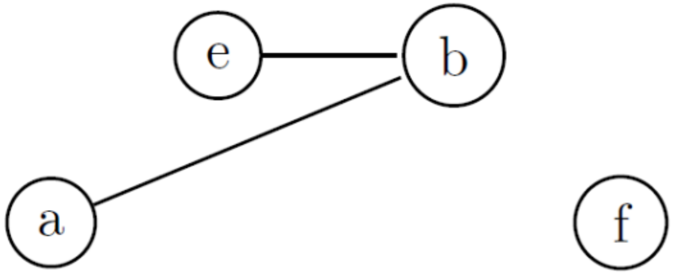


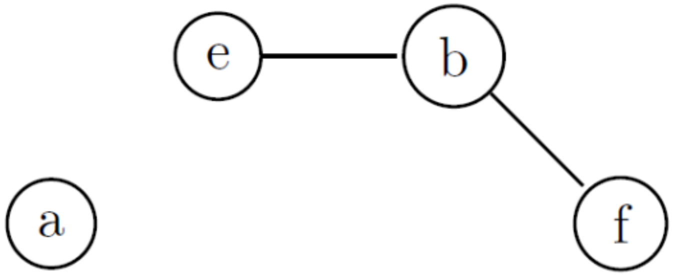
Sous-graphes et types de graphes
Faire une longue marche

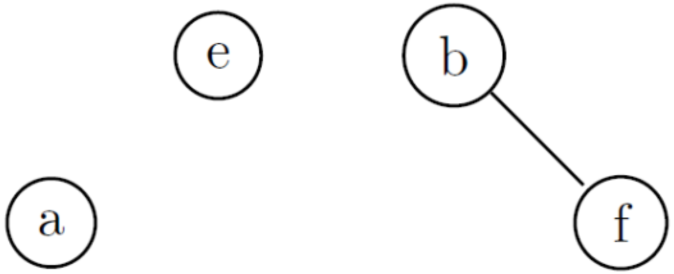
- Il y a 16 sous-graphes!

solution





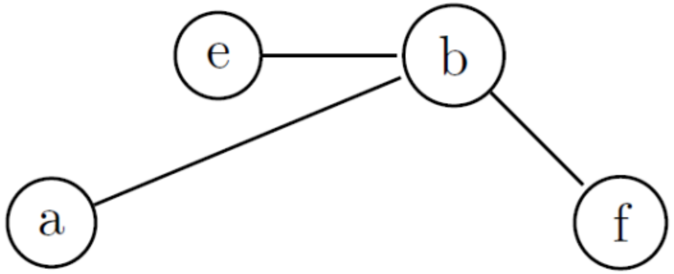


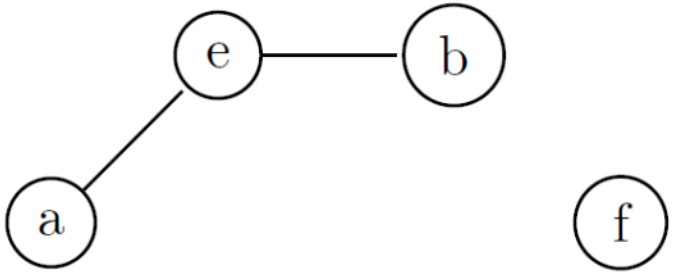


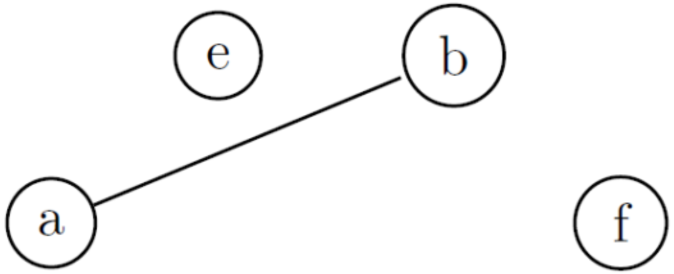
Sous-graphes et types de graphes
Faire une longue marche

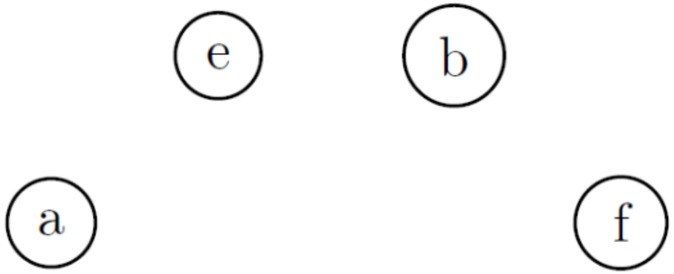
- Il y a 16 sous-graphes!

solution









Sous-graphes et types de graphes

Sous-graphes

- Si $S \subseteq V(G)$, alors le **sous-graphe induit par $\boldsymbol{S}$**, noté $\langle S \rangle$, est le sous-graphe constitué de S et de toutes les arêtes de la forme uv de G, où $u \in S$ et $v \in S$.
- Parmi tous les sous-graphes de G, $\langle S \rangle$ a le nombre maximum d'arêtes possible.

- Un **graphe étiqueté** est un graphe dont les sommets sont associés à des étiquettes. S'il n'y a pas d'étiquettes attachées aux sommets, le graphe est **non étiqueté**.

Sous-graphes et types de graphes

Sous-graphes

- Si $S \subseteq V(G)$, et qu'il y a un total de k arêtes qui joignent les sommets de S dans un graphe étiqueté G, alors il y a 2^k sous-graphes de G qui utilisent S comme ensemble de sommets.

- Un sous-graphe H du graphe G est appelé un **sous-graphe couvrant** (**spanning subgraph**) si $V(H) = V(G)$. Dans ce cas, nous disons que «H couvre G»(H spans G).
- Nous pouvons former un sous-graphe couvrant d'un graphe donné en supprimant simplement des arêtes. Il s'ensuit qu'un graphe étiqueté avec k arêtes a 2^k sous-graphes couvrant.

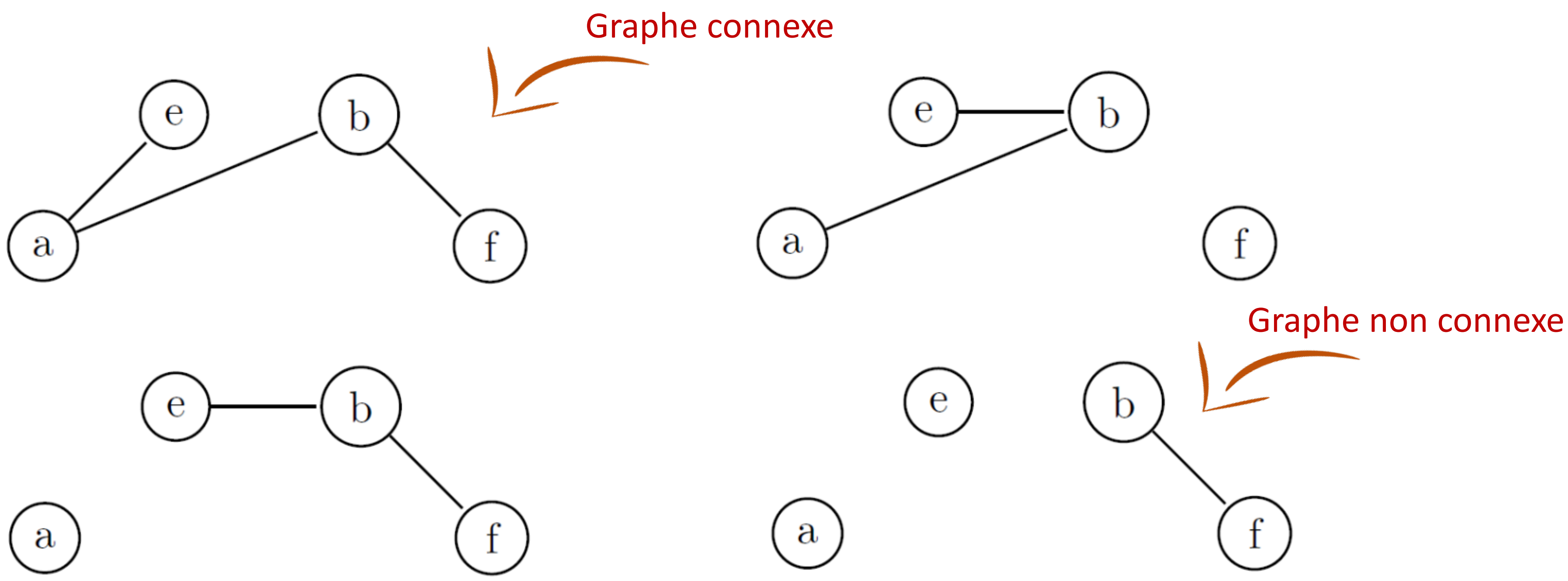
Sous-g[illegible]es et types de graphes

Fair[illegible]gue marche

REVISITÉ

solution

[illegible]l y a 16 sous-graphes!



Sous-graphes et types de graphes
Sous-graphes

- Dans un graphe non connexe, les différents «morceaux» du graphe sont appelés **composantes**.
- Une **composante** est un sous-graphe connexe maximal (nous recherchons les plus grands sous-graphes possibles qui conservent la propriété de connexité).

Sous-g… es et types de graphes

Fair… gue marche

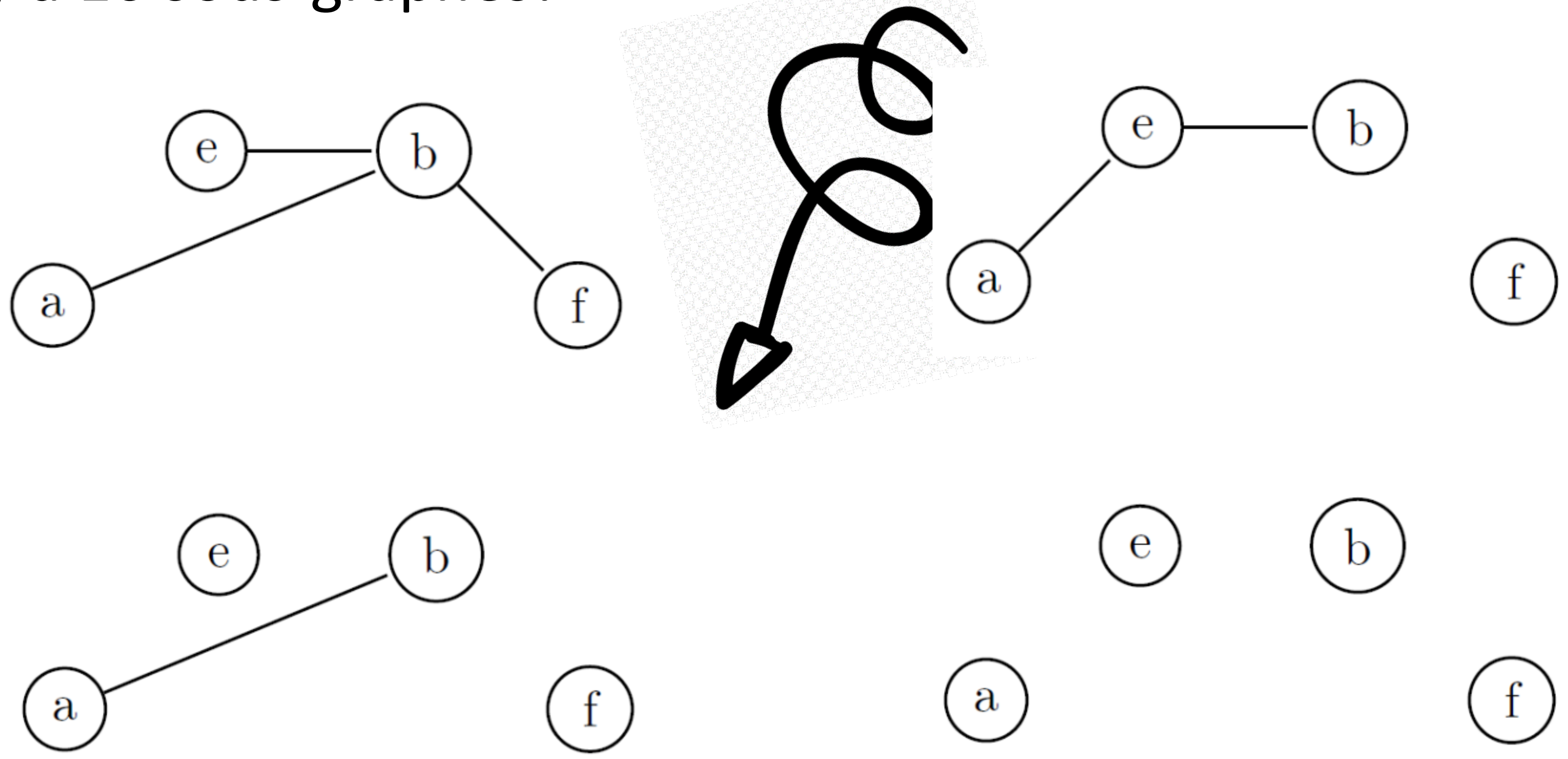
REVISITÉ

… il y a 16 sous-graphes!

solution

Question rapide

Combien de composantes connexes y a-t-il dans chacun de ces sous-graphes?

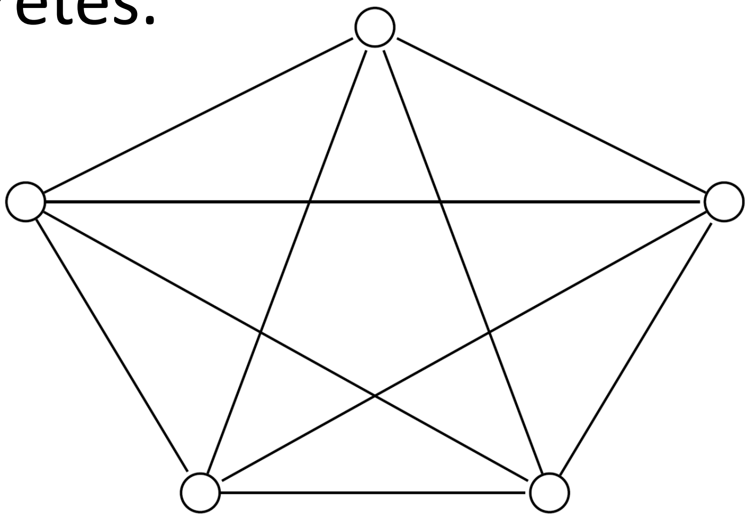


Sous-graphes et types de graphes
Types de graphes importants

- Le **graphe complet** de n sommets, noté K_n, est le graphe où toutes les paires de sommets sont adjacentes.

$$|V(K_n)| = n \rightarrow |E(K_n)| \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

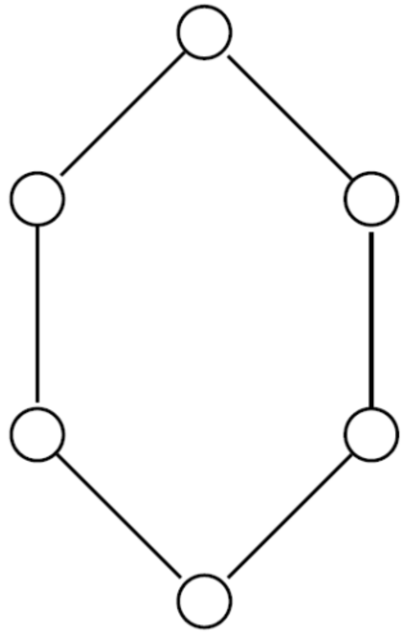
- Un graphe avec 5 sommets peut avoir au plus 10 arêtes.
- Le graphe K_n est l'unique graphe connexe $(n-1)$-régulier sur n sommets.
- Le graphe K_1 est appelé **graphe trivial**.



K_5

Sous-graphes et types de graphes
Types de graphes importants

- Pour $n \geq 3$, le **cycle** sur n sommets noté C_n est un cycle sur n sommets!
- Notez que C_3 et K_3 sont le même graphe.
- C_n est l'unique graphe 2-régulier connexe sur n sommets.

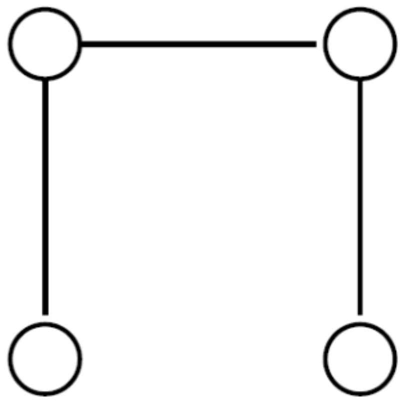


C_6

Sous-graphes et types de graphes

Types de graphes importants

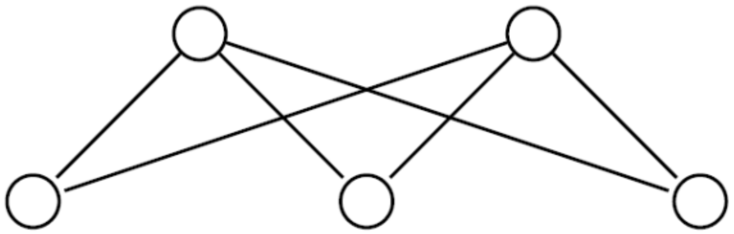
- Le **graphe chemin (path)** sur n sommets est noté P_n.
- Notez que $P_1 = K_1$ et $P_2 = K_2$.
- P_n est un sous-graphe couvrant de C_n, obtenu en supprimant une seule arête.



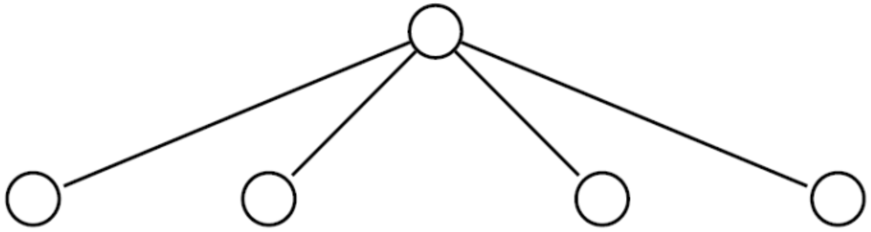
P_4

Sous-graphes et types de graphes
Types de graphes importants

- Le **graphe biparti complet** $K_{m,n}$ est le graphe dont l'ensemble de sommets peut être partitionné en ensembles non vides A et B d'ordre m et n, de sorte que chaque sommet de A soit adjacent à chaque sommet de B et qu'il n'y ait pas d'autres adjacences .
- Lorsque $m = n$, le graphe biparti complet devient $K_{n,n}$, qui est n-régulier



$K_{2,3}$

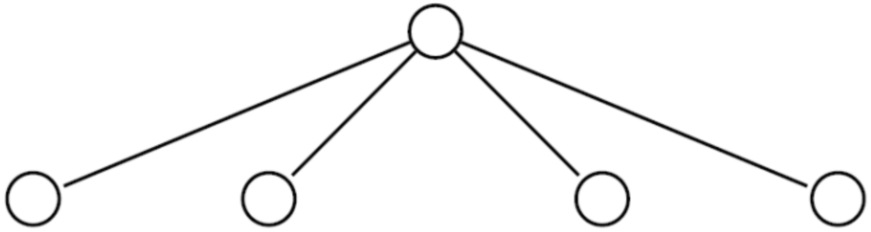


$K_{1,4}$

Sous-graphes et types de graphes

Types de graphes importants

- Le **graphe étoile (star)** $K_{1,n}$, est le graphe biparti complet qui se compose d'un sommet de degré n, tandis que les autres n sommets sont des sommets d'extrémité, c'est-à-dire qu'ils ont un degré un.
- L'étoile $K_{1,n}$ serait un graphe utilisé pour modéliser un réseau informatique dont un serveur est lié à n autres ordinateurs du réseau.



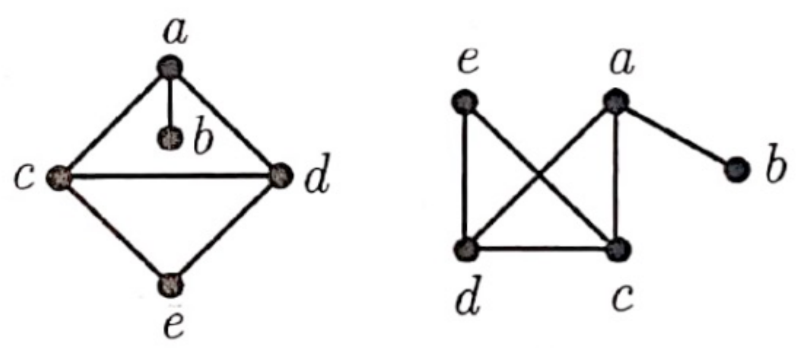
$K_{1,4}$

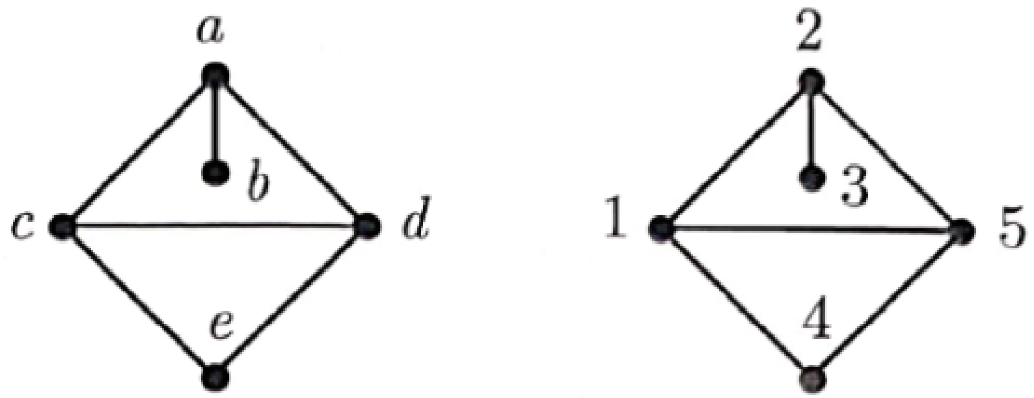
Plan

- Graphes comme modèles
- Sous-graphes et types de graphes
- Graphes isomorphes
- Opérations sur les graphes

Graphes isomorphes

- 2 personnes peuvent dessiner un graphe très différemment.



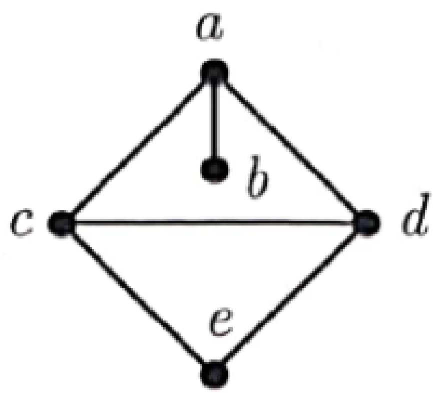


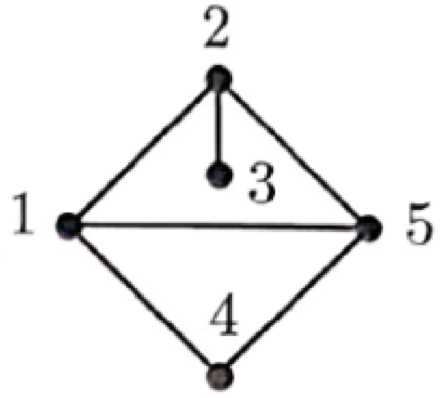
- Dans la plupart des problèmes, nous essayons de déterminer si 2 graphes sont *structurellement* identiques.

Graphes isomorphes

- Les graphes G et H sont **isomorphes**, notés $G \cong H$, s'ils peuvent être étiquetés de sorte que u et v soient adjacents dans G ssi les sommets correspondants sont adjacents dans H. Sinon, G et H sont **non isomorphes**.

- G et H sont isomorphes s'il y a un un-à-un sur la fonction $f: V\ (G) \rightarrow V\ (H)$ tel que toute paire de sommets u et v soit adjacente dans G ssi $f(u)$ et $f(v)$ sont adjacents dans H. f est appelée un **isomorphisme** de G dans H.





Graphes isomorphes

- Une condition préalable à un isomorphisme entre 2 graphes est qu'ils aient le même ordre et la même taille.

- L'isomorphisme ou le non-isomorphisme pour les grands graphes est généralement très difficile à déterminer.

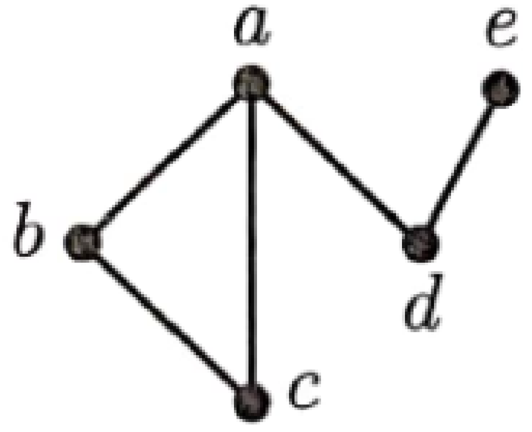
Graphes isomorphes

- Une technique de base pour montrer que 2 graphes sont isomorphes: Soit $f: V\ (G) \rightarrow V\ (H)$ un isomorphisme entre G et H. Alors pour tout sommet $u \in V\ (G)$, on a deg(u) = deg($f(u)$). En d'autres termes, si les 2 graphes sont isomorphes, les sommets correspondants ont le même degré.

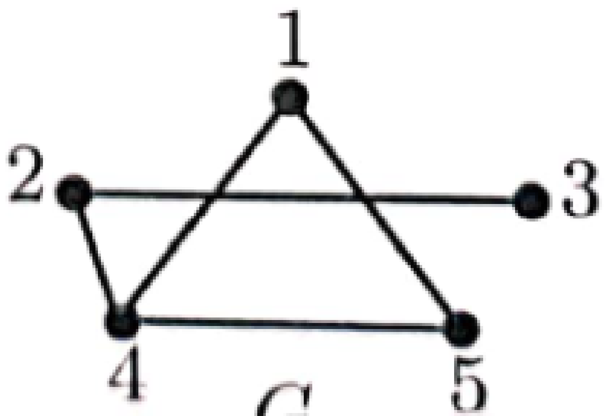
Graphes isomorphes

Exercice

- Décrivez une fonction qui montre que les graphes suivants sont isomorphes.



G_1



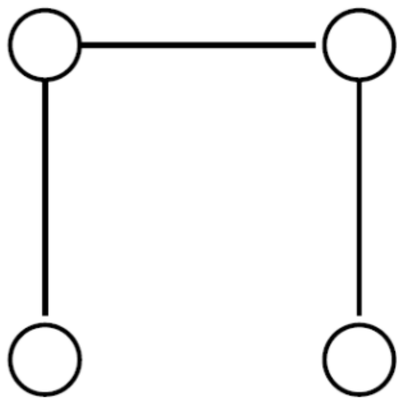
G_2

Graphes isomorphes

- Puisqu'un isomorphisme doit conserver les adjacences, toutes les adjacences le long d'une géodésique donnée sont aussi nécessairement préservées: soit G et H isomorphes avec isomorphisme $f: V(G) \rightarrow V(H)$.
- Si $v_1, v_2, v_3, \ldots v_k$ est une géodésique entre les sommets v_1 et v_k dans G, alors $f(v_1), f(v_2), f(v_3), \ldots, f(v_k)$ est une géodésique entre les sommets $f(v_1)$ et $f(v_k)$ dans H.

Graphes isomorphes
Séquence de degrés

- Si G a n sommets, sa **séquence de degrés** est le n-tuple ordonné des degrés dans l'ordre décroissant.
- Énumérez les degrés répétés autant de fois qu'ils se produisent.
- Exemples:
  - La séquence de degrés de P_4 : 2 2 1 1
  - La séquence de degrés de P_5 : 2 2 2 1 1
  - La séquence de degrés de C_5 : 2 2 2 2 2



P_4

Graphes isomorphes
Séquence de degrés

- Une séquence décroissante d'entiers positifs, S, est appelée **graphique** s'il existe un graphe dont la séquence de degrés est S.

- Pour déterminer si une séquence donnée est graphique: étant donné une séquence décroissante S de n entiers positifs, nous essayons de former une nouvelle séquence S' avec $n - 1$ entiers.

Graphes isomorphes
Algorithme de séquence de degrés graphique

- Étape 1: supprimez le premier numéro, disons k, de S.
- Étape 2: soustrayez 1 de chacun des k termes de S suivants si cela est possible. Appelez la séquence résultante S'. Si S' ne peut pas être formée, STOP, la séquence originale n'est pas graphique. Si tous les termes de la séquence actuelle sont à zéro, STOP, la séquence est graphique.
- Étape 3: Réorganiser la séquence obtenue pour qu'elle soit une séquence $S*$ par ordre décroissant.
- Étape 4: soit S = $S*$ et revenez à l'étape 1.

Graphes isomorphes

Exercice

- Déterminez si 3 2 2 1 1 1 est graphique.

$\cancel{3}$ 2 2 1 1 1

1 1 0 1 1

$\cancel{1}$ 1 1 1 0

0 1 1 0

1 1 0 0

Nous aurions pu nous arrêter ici

$\cancel{1}$ 1 0 0

0 0 0

Graphes isomorphes

Exercice

- Déterminez si 5 4 4 3 3 3 3 2 2 1 est graphique.

$\cancel{5}$ 4 4 3 3 3 3 2 2 1

3 3 2 2 2 3 2 2 1

$\cancel{3}$ 3 3 2 2 2 2 2 1

2 2 1 2 2 2 2 1

P_7

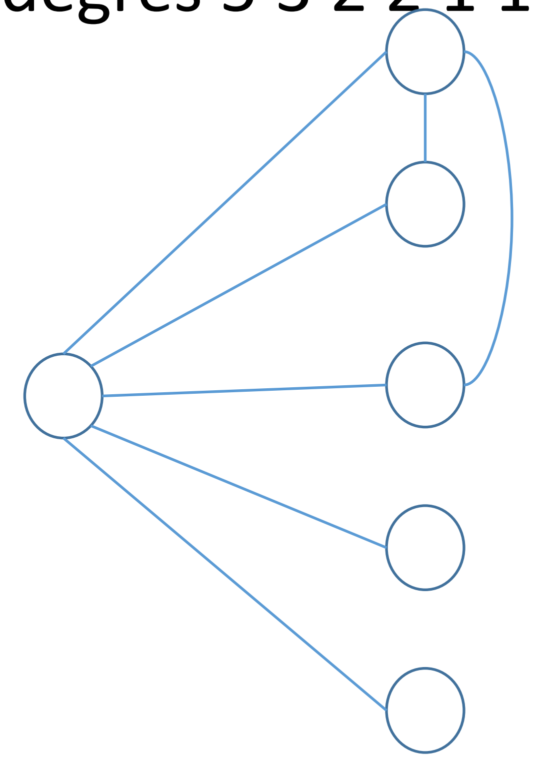
2 2 2 2 2 2 1 1 ✓

Graphes isomorphes

Exercice

- Montrez qu'il existe précisément un graphe qui a une séquence de degrés 5 3 2 2 1 1.

5 3



Graphes isomorphes

- Il n'y a pas d'algorithme efficace pour distinguer les graphes non isomorphes!
- Il existe des techniques qui fonctionnent bien pour les graphes de taille moyenne basés sur des invariants de graphe.
- Un **invariant de graphe** est une fonction définie sur des graphes avec la propriété que les graphes isomorphes prennent la même valeur de fonction.

Graphes isomorphes

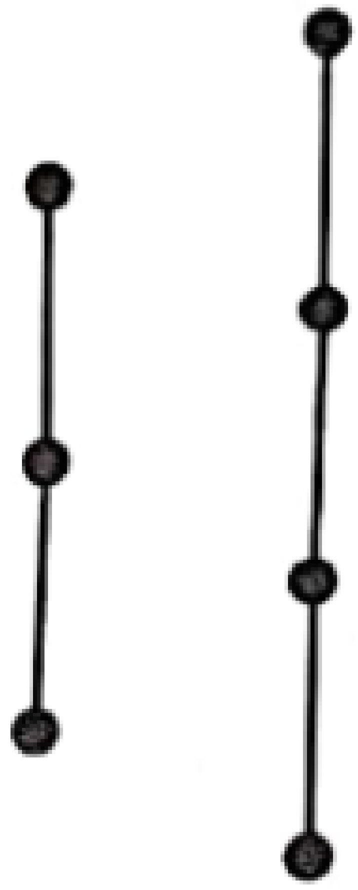
- Montrer que 2 graphes ont une valeur différente pour un invariant de graphe donné prouve que les 2 graphes ne sont pas isomorphes.
- Quelques éléments à vérifier lorsque vous essayez de montrer le non-isomorphisme:
  1. Nombre de sommets
  2. Nombre de composants
  3. Nombre d'arêtes
  4. Séquence de degrés
  5. Longueur d'une géodésique entre une paire de sommets avec un degré unique donné
  6. Longueur du chemin le plus long du graphe
  7. Degré de voisins pour un sommet avec un degré unique

Plan

- Graphes comme modèles
- Sous-graphes et types de graphes
- Graphes isomorphes
- Opérations sur les graphes

Opérations sur les graphes
Union et jointure

- Si G et H sont des graphes disjoints, leur **union** $G \cup H$ est le graphe avec $\mathrm{V}(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ and $\mathrm{E}(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.
- $G \cup H$ consiste en une copie de G avec une copie de H.

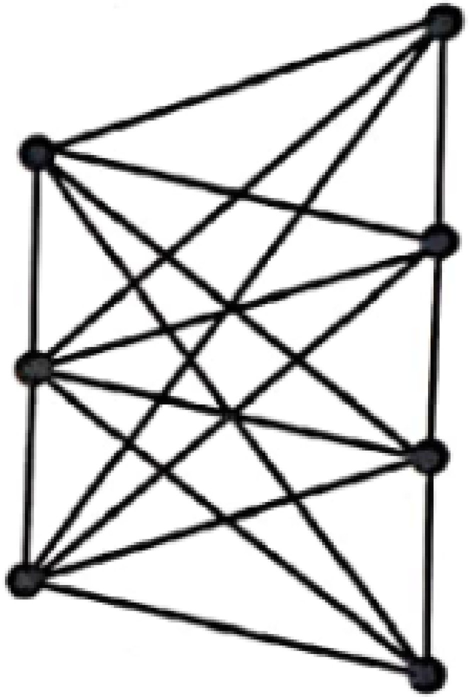


$P_3 \cup P_4$

Opérations sur les graphes
Union et jointure

- La **jointure** des graphes disjoints G et H, notée $G + H$, est formée en ajoutant à $G \cup H$ des arêtes qui ont un sommet d'extrémité en G et l'autre en H.
- Si G et H ont des sommets m et n, il faut ajouter mn arêtes à $G \cup H$.

- Les roues sont une classe de graphes construits à l'aide de l'opération de jointure. Pour $n \geq 3$, la **roue** $W_{1,n}$ est la jointure de K_1 avec C_n, soit $W_{1,n} = K_1 + C_n$.

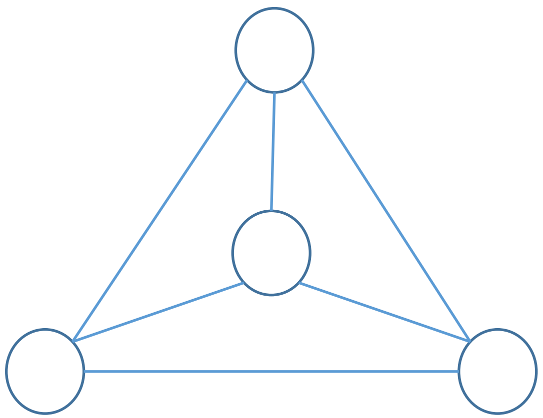


$P_3 + P_4$

Opérations sur les graphes
Union et jointure

Exercice

- Dessiner les roues $W_{1,3}$, $W_{1,4}$ et $W_{1,5}$

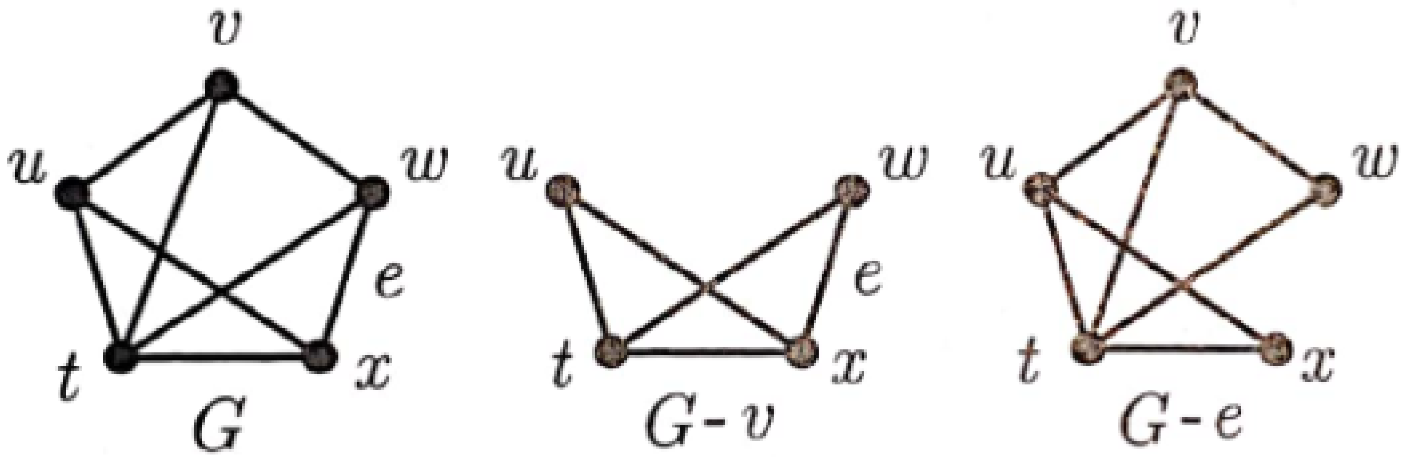


$W_{1,3}$

Opérations sur les graphes
Suppression d'arêtes ou de sommets

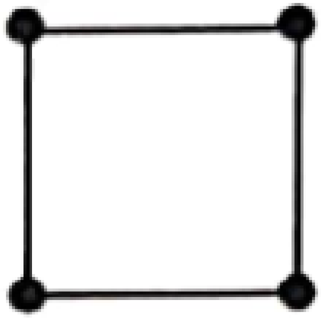
- Si v est un sommet de G, le graphe $\boldsymbol{G - v}$ est le graphe formé à partir de G en supprimant v et toutes les arêtes incidentes avec v.

- Lorsque nous supprimons une arête, nous ne supprimons pas les sommets incidents avec cette arête.

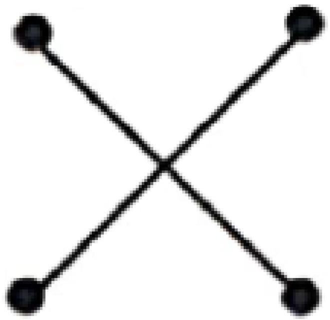


Opérations sur les graphes Complément

- Le Complément $\overline{G}$ d'un graphe G a $\mathrm{V}(\bar{G}) = V(G)$ et $uv \in E(\bar{G})$ ssi $uv \notin E(G)$.
- G et son complément ont les mêmes sommets, tandis que le complément a précisément les arêtes qui manquent à G.



G



$\bar{G}$

- Le complément d'un graphe non connexe est connexe.
- $(\overline{G + H}) = \bar{G} \cup \overline{H}$

Opérations sur les graphes
Complément

- Un graphe G est **auto-complémentaire** si G est isomorphe à $\bar{G}$.
- Pour tout graphe auto-complémentaire, l'ordre n est de la forme $4k$ ou $4k + 1$, où k est un entier non négatif. De plus G a $\frac{n(n-1)}{4}$ arêtes.

Opérations sur les graphes
Complément

Exercice

- Trouver tous les graphes auto-complémentaires d'ordre au plus 4.

L'ordre doit être 1, 4 ou 5.

Le seul graphe d'ordre 1 est K_1, qui est auto-complémentaire.

Pour l'ordre 4, le nombre d'arêtes est 3. Il y a 3 graphes avec 4 sommets et 3 arêtes: $K_3 \cup K_1$, P_4 et $K_{1,3}$.. Parmi ceux-ci, seul P_4 est auto-complémentaire.

Tous les graphes auto-complémentaires d'ordre au plus 4:

Opérations sur les graphes

- Nous ne couvrirons pas pour le moment:
  - Produit cartésien
  - Hypercubes
  - Mailles
  - Graphes linéaires
  - Contraction des bords