Théorie des Graphes

Université Libanaise
Faculté des Sciences
License Informatique
2ème année – S3

Horaire

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
08h00-09h30					
09h50-11h20	I2204	INFO404	I2204	INFO404	I2204
11h30-13h00					
13h30-15h00					
15h00-16h30		I2205		I2205	

Notation

Présence + Interaction	10 pts
Drop Quizzes	30 pts
Final	60 pts
Total	**100 pts**

Dr Siba Haidar

Office	**Faculté des Sciences – Section I** **Ancien bâtiment** **2ème étage** **Bureau 236Office 220**
Email	**siba.haidar@ul.edu.lb**

Syllabus

1. Concepts introductifs
2. Introduction aux graphes et à leurs utilisations
3. Arbres et graphes bipartis
4. Distance et connexité
5. Graphes Eulériens et Hamiltoniens
6. Coloration des graphes
7. Matrices
8. Algorithmes sur les graphes
9. Graphes planaires
10. Digraphes et réseaux

Concepts introductifs

Semaine 1

Plan

- Préliminaires mathématiques
- Induction mathématique
- Permutations et combinaisons
- Triangle de Pascal et identités combinatoires

Préliminaires mathématiques

- Théorèmes
- Arrondi
- Parité
- Ensembles
- Sous-ensembles
- Opérations d'ensemble
- Produit Cartésien

Préliminaires mathématiques
Théorèmes

- 2 formes
  1. "(déclaration A) si et seulement si (déclaration B)" $A \Leftrightarrow B$
  2. "si A alors B » $A \Rightarrow B$

Exemples:

- Supposons que x est un entier. Alors x^2 est pair si et seulement si x est pair.
- "si vous travaillez dur, alors vous serez riche"

Préliminaires mathématiques
Arrondi

- Un entier $\in \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, 3, -3, \dots\}$
- Arrondir à l'entier supérieur ou inférieur le plus proche

- $\lfloor x \rfloor$ représente l'**arrondi inférieur** ou **floor** de x
- $\lceil x \rceil$ représente l'**arrondi supérieur** ou **ceiling** de x

Exemples

- $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ $\lfloor 5.98 \rfloor = 5$ $\lfloor -3.1 \rfloor = -4$
- $\lceil \pi \rceil = 4$ $\lceil 5.38 \rceil = 6$ $\lceil -6.7 \rceil = -6$

Préliminaires mathématiques
Arrondi

- si n est un entier, $\lceil n \rceil = \lfloor n \rfloor = n$
- Si n n'est pas un entier, $\lceil n \rceil - \lfloor n \rfloor = 1$

Préliminaires mathématiques
Arrondi

Exercice

Fonction d'arrondi

Est-ce que $\lfloor 2n \rfloor = 2\lfloor n \rfloor$?

Pensez à un contre-exemple

Pour $n = 3.2$

$$\lfloor 2 * 3.2 \rfloor = \lfloor 6.4 \rfloor = 6$$

$$2\lfloor 3.2 \rfloor = 2 * 3 = 6$$

Pour $n = 3.6$

$$\lfloor 2 * 3.6 \rfloor = \lfloor 7.2 \rfloor = 7$$

$$2\lfloor 3.6 \rfloor = 2 * 3 = 6$$

Préliminaires mathématiques
Arrondi

Exercice

Fonction d'arrondi

Est-ce que $\lfloor 2n \rfloor = 2\lfloor n \rfloor$?

Déduire la bonne relation?

$$\lfloor 2n \rfloor \geq 2\lfloor n \rfloor$$

Cela vaut-il pour tout n?

Nous devons le prouver!

Nous sommes des informaticiens et non des mathématiciens!

Préliminaires mathématiques
Arrondi

Fonction d'arrondi

Exercice

Compléter $\lceil 2n \rceil \quad \leq \quad 2\lceil n \rceil$

Préliminaires mathématiques
Parité

- Pour n un entier,
  - $2 * n$ est un nombre pair
  - $2 * n + 1$ est un nombre impair

Exemples

- $0 = 2 * 0$ est un nombre pair
- $3 = 2 * 1 + 1$ est un nombre impair
- $2jk$ est un nombre pair où j et k sont des entiers
- $4rsp + 1$ est un nombre impair où r, s et p sont des entiers

Préliminaires mathématiques
Parité

- La somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire.
- La parité est préservée lorsque nous mettons un entier au carré.
- Le produit d'un entier impair et pair est pair.
- Un produit d'entiers est pair si et seulement si au moins un des facteurs est pair.
- Le produit de n entiers impairs est impair.
- Pour tout nombre négatif x et entier n, x^n est positif lorsque n est pair, et x^n est négatif lorsque n est impair.

Préliminaires mathématiques
Ensembles

- Un ensemble est une collection d'objets de toute nature.
- Un ensemble est une collection d'objets **bien définie**.
- Un objet d'un ensemble est dit membre ou élément de l'ensemble.

- **bien défini**: il existe une règle qui permet de distinguer si un élément particulier appartient ou non à l'ensemble.

- Exemple:
  - Nous ne parlons pas de l'ensemble des personnes intelligentes. Ce n'est pas une collection bien définie!

Préliminaires mathématiques
Ensembles

- Les lettres majuscules indiquent les ensembles
- les lettres minuscules désignent des éléments

- $x \in A$, x est un élément de l'ensemble A
- $y \notin A$, y n'est pas dans A

- Exemple
  - P est l'ensemble des nombres premiers, alors $101 \in P$, $91 \notin P$

Préliminaires mathématiques
Ensembles

- Pour décrire un ensemble
  - Liste des éléments;
  - Décrire les éléments en termes de propriété qui les caractérise;
  - Utilisation d'unions, d'intersections ou de compléments d'ensembles.

- Un ensemble est **fini** si l'on peut compter le nombre d'éléments. Sinon, l'ensemble est **infini**.
- La **cardinalité** d'un ensemble fini X est le nombre d'éléments contenus dans X et est notée $|X|$.

Préliminaires mathématiques
Ensembles

- **Format de liste:** séparez les éléments par une virgule
  - Exemple: {1, 8, 3, 11}
- L'ordre dans lequel nous listons les éléments d'un ensemble n'a pas d'importance.
- Lorsqu'il y a une infinité d'éléments, utilisez des points de suspension «…»

- **Format de propriété:** commencez par une variable x, ajoutez un deux-points (ou |) (lu tel que ou où) suivi de la propriété (ou liste de propriétés) qui caractérise l'élément x.
  - Exemples:
    - $\{x$: x est un entier pair}
    - $\{y$: y est un carré parfait, y est divisible par 3}

Préliminaires mathématiques
Ensembles

- **Nombres naturels (ou entiers positifs):** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3,4, \dots\}$
- **Entiers**: $\mathbb{Z} = \{0,1, -1,2, -2,3, -3, \dots\} = \{\dots, -2, -1,0,1,2, \dots\}$
- **Nombres rationnels**: $\mathbb{Q} = \left\{x : x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$
- **Nombres réels**:
  $\mathbb{R} = \{x : x \text{correspond à un point sur la droite numérique}\}$
- **Nombres premiers**:
  $\mathbb{P} = \{x : x \geq 2, if\ y\ \in\ \mathbb{N}\text{divise}x, \text{alors } y = 1 \text{ ou } y = x\} =$
  $\{2,3,5,7,11,13,17,19,23, \dots\}$

Préliminaires mathématiques
Ensembles

Exercice

Lesquels des éléments suivants sont des ensembles?

1. La collection d'entiers positifs supérieurs à 18
   - ✓ $A = \{19,20,21,22,\ldots\}$
2. La collection de tous les élèves intelligents de la classe
   - ✗ intelligent n'est pas assez spécifique
3. La collection de lettres dans le mot "possess"
   - ✓ $\{p, o, s, e\}$ ou toute combinaison de ces 4 lettres
4. L'ensemble des entiers impairs divisibles par 6
   - ✓ ∅ ensemble vide / ensemble nul

Préliminaires mathématiques

Ensembles

Exercice

Écrire en utilisant le format de liste mais sans écrire tous les éléments?

1. $A = \{x : x \text{ est un entier pair}, \ \ -4 \leq x \leq 58\}$

   $\mathrm{A} = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots 58\}$

2. $\mathrm{B} = \{x : x \in \mathbb{N}, \ x \text{ est un carré parfait}\}$

   $\mathrm{B} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$

3. $C = \{x : x \in \mathbb{N}, \ x \text{ est un multiple de } 7\}$

   $\mathrm{C} = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, \ldots\}$

Préliminaires mathématiques
Sous-ensembles

- A est égal à B, $A = B$: les deux ensembles contiennent les mêmes éléments
- A est un sous-ensemble de B, $A \subseteq B$: tout élément de A est aussi un élément de B
- A est un sous-ensemble propre de B, $A \subset B$: $A \subseteq B$ et B a des éléments supplémentaires pas dans A
- $\emptyset \subseteq A$

- Remarque: A est égal à B: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ et B $\subseteq A$

Préliminaires mathématiques
Sous-ensembles

Exercice

Lesquels des éléments suivants sont des sous-ensembles d'autres ensembles?

1. $E = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$
2. $\mathrm{M} = \{y:\ \mathrm{y\ est\ un\ multiple\ positif\ de\ 8}\}$
3. $B = \{x:\ x \in \mathbb{N},\ x \text{ est un carré parfait}\}$
4. $T = \{16, 64, 196\}$

$\mathrm{M} \subseteq E$ $\quad T \subseteq E$ $\quad \mathrm{T} \subseteq B$

Préliminaires mathématiques
Sous-ensembles

- L'ensemble de puissance $\wp\,(A)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de A.

Exemple:

- Si A = $\{a, b\}$, alors $\wp\,(A)$ = $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

- Si A contient n éléments, alors $\wp\,(A)$ contient 2^n éléments.

Préliminaires mathématiques
Opérations d'ensemble

- **Union**: $A \cup B$ = $\{x$: $x \in A$ ou $x \in B\}$ est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A ou B ou aux deux
- **Intersection**: $A \cap B$ = $\{x$: $x \in A$, $x \in B\}$ est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à A et B

Préliminaires mathématiques
Opérations d'ensemble

- **Ensemble universel:** L'ensemble des objets auxquels nous restreignons notre attention et est noté U

  Exemple: C = {x: $x \in \mathbb{N}$, x est multiple de 7} est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ = {1,2,3,4, …}.

  $\mathbb{N}$ est l'ensemble universel ici.

  Chaque ensemble que nous considérons (comme C ici) contient des éléments sélectionnés parmi U

- **Le complément** d'un ensemble A est noté A': c'est l'ensemble de tous les éléments de U mais pas de A

$$A' = \{x : x \in U, x \notin A\}$$

Préliminaires mathématiques
Opérations d'ensemble

- **OU exclusif:** ou bien A ou bien B mais non pas les deux

$$(A \cup B) \cap (A \cap B)'$$

Préliminaires mathématiques
Opérations d'ensemble

Exercice

$$U = \{1,2,3,\ldots,8\}\; A = \{1,7,8\}$$
$$B = \{2,6,7\}\;\; C = \{1,5,6,8\}$$

1. $\mathrm{A} \cup B =$ $\{1,2,6,7,8\}$
2. $\mathrm{A} \cap C =$ $\{1,8\}$
3. $\mathrm{B}' =$ $\{1,3,4,5,8\}$
4. $\mathrm{A} \cup C' =$ $\{1,2,3,4,7,8\}$
5. $\mathrm{A}' \cap B' = \{3,4,5\} = (\mathrm{A} \cup B)'$

Préliminaires mathématiques
Propriétés des opérations d'ensemble

- **(Associativité des Unions):** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- **(Associativité des Intersections):** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **(Commutativité des Unions):** $A \cup B = B \cup A$
- **(Commutativité des Intersections):** $A \cap B = B \cap A$
- **(Double négation):** $(A')' = A$
- **(Loi distributive):** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **(Loi distributive):** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **(Loi de DeMorgan):** $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- **(Loi de DeMorgan):**$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Préliminaires mathématiques
Opérations d'ensemble

Exercice

A est l'ensemble de tous les étudiants de l' UL

B est l'ensemble de tous les étudiants l'UL qui jouent au football

C est l'ensemble de toutes étudiants en sciences de l'UL

Interpréter $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

L'ensemble de tous les étudiants de UL qui jouent au football ou qui sont dans une majeure en sciences est le même que l'ensemble des étudiants de UL et jouent au football ou sont des étudiants de UL et préparent une majeure en sciences

Préliminaires mathématiques
Produit Cartésien

- $A \times B$: est l'ensemble de toutes les paires ordonnées (a, b), où $a \in A$, et $b \in B$.

- a et b sont appelées coordonnées de la paire ordonnée (a, b)

- $A \times B = \{(a, b)\colon a \in A, \mathrm{b} \in B\}$

Préliminaires mathématiques
Produit Cartésien

Exercice

$$A = \{1,2,3\}$$
$$B = \{x, y\}$$

1. A$\times B =$ $\{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$

Préliminaires mathématiques
Produit Cartésien

- La **relation** sur l'ensemble A est un sous-ensemble de $A \times A$
- Une relation de l'ensemble A à l'ensemble B est un sous-ensemble de $A \times B$

- Exemple
  - $A = \{1,2,3\}$ $B = \{x, y\}$
  - A $\times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$
  - Relations possibles
    - $C = \{(1, y), (2, x), (2, y), (3, x)\}$,
    - $D = \{(2, y), (3, y)\}$,
    - $E = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}$.

Préliminaires mathématiques
Produit Cartésien

- La **fonction** de A à B est une relation dans laquelle chaque élément de A apparaît comme la première coordonnée d'une paire ordonnée précisément dans la relation.
- $f: A \longrightarrow B$, lire comme «f correspond A à B»

Remarque:

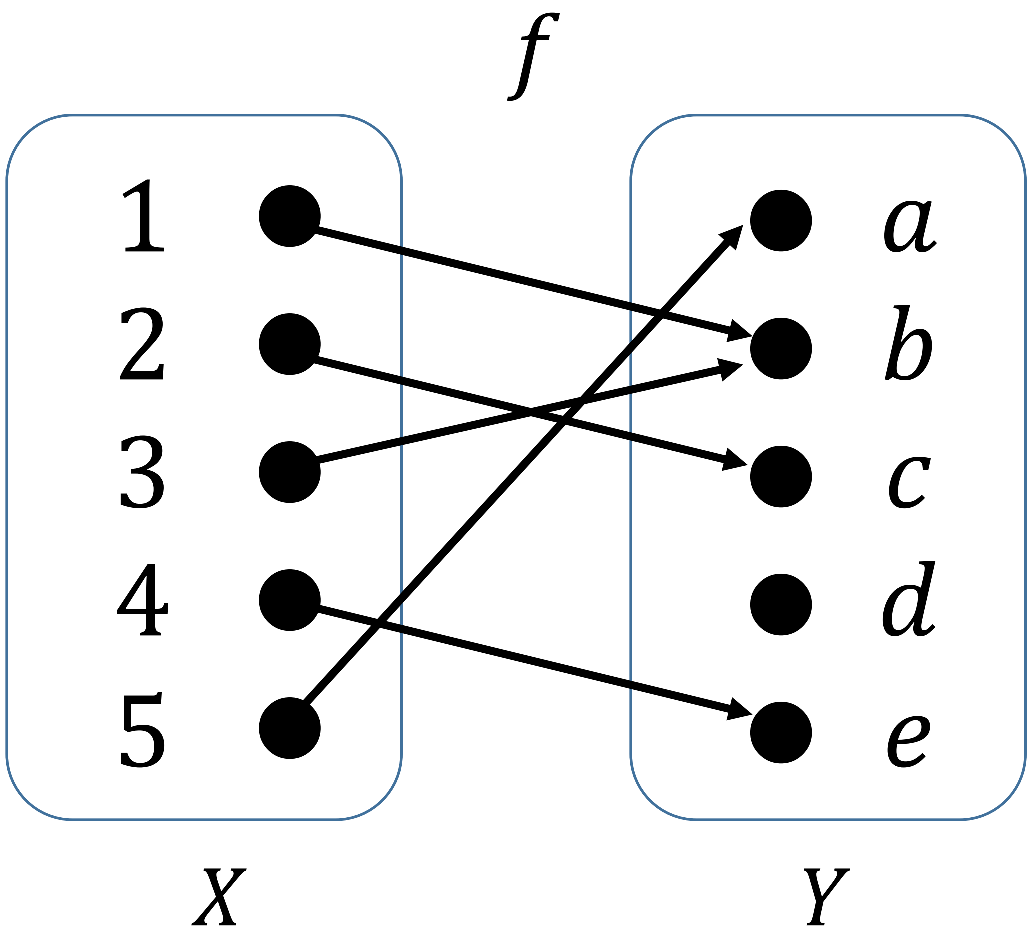
- Si f contient $(1, y)$, $(2, x)$, $(2, y)$, $(3, x)$, on peut écrire $f(1) = y$,…

Préliminaires mathématiques
Produit Cartésien

Exemple $f: X \longrightarrow Y$

- $X = \{1,2,3,4,5\}, Y = \{a, b, c, d, e\}$

$$f(1) = b$$
$$f(2) = c$$
$$f(3) = b$$
$$f(4) = e$$
$$f(5) = a$$



Préliminaires mathématiques
Produit Cartésien

- Une fonction f est **injective** si les secondes coordonnées sont toutes distinctes.
- Une fonction (ou relation) de A à B est **surjective** si chaque élément de B apparaît au moins une fois comme deuxième coordonnée d'un élément de la fonction.

Exemple

- $A = \{1,2,3\}\ \ B = \{x, y\}$
- $\mathrm{A}\times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$,
  - $C = \{(1, y), (2, x), (2, y), (3, x)\}$
  - $D = \{(2, y), (3, y)\}$
  - $E = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}$
- C et E sont des relations surjectives, E est une fonction surjective. Aucune n'est injective.

Préliminaires mathématiques
Produit Cartésien

- Une fonction qui est à la fois **injective** et **surjective** est appelée fonction **bijective**.
- Ces fonctions sont très importantes pour compter les problèmes ainsi que pour d’autres problèmes mathématiques. (Nous allons l'utiliser dans l'isomorphisme des graphes)

Préliminaires mathématiques
Produit Cartésien

Exercice

$$X = \{Ali, Bachir, Clara, Dany\}$$
$$Y = \{1,2,3,4\}$$

Trouvez 2 fonctions bijectives différentes de X à Y

$$f = \{(Ali, 1), (Bachir, 2), (Clara, 3), (David, 4)\}$$
$$g = \{(Ali, 3), (Bachir, 2), (Clara, 1), (David, 4)\}$$
$$\dots$$

Plan

- Préliminaires mathématiques
- Induction mathématique
- Permutations et combinaisons
- Triangle de Pascal et identités combinatoires

Induction mathématique

- C'est une technique de preuve puissante qui peut être utilisée pour vérifier des équations, des inégalités et d'autres vérités mathématiques.

Induction mathématique
Somme des premiers $\boldsymbol{n}$ entiers positifs

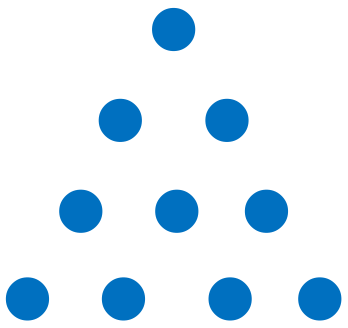
- $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\times(n+1)}{2}$
- Les nombres de la forme $\frac{n\times(n+1)}{2}$ sont des **nombres triangulaires**.
- Le $n$ème nombre triangulaire est noté t_n , t_n=$\frac{n\times(n+1)}{2}$
- Les premiers nombres triangulaires sont 1, 3, 6, 10, 15, 21 et 28.

Induction mathématique
Somme des premiers $\boldsymbol{n}$ entiers positifs

Exercice

Trouver t_4

$$t_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4\times(4+1)}{2} = \frac{4\times5}{2} = 10$$

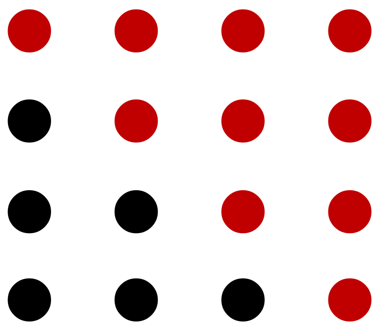


Induction mathématique
Somme des premiers $\boldsymbol{n}$ entiers positifs

- La somme de 2 nombres triangulaires consécutifs est un carré parfait

$$t_{n-1} + t_n = n^2$$

- Exemple: t_3 (points noirs) et t_4 (points rouges) forment le carré 4x4 de 16 points.



Plan

- Préliminaires mathématiques
- Induction mathématique
- Permutations et combinaisons
- Triangle de Pascal et identités combinatoires

Permutations et combinaisons

- Comptage en théorie des graphes:
  - détermination du nombre d'objets d'un type donné dans des graphes particuliers.
- Permutations
- Combinaisons

Permutations et combinaisons
Permutations

- Une **permutation** est un arrangement d'objets dans un ordre spécifique.

- Exemple: de combien de façons pouvez-vous lire 3 livres (A, B et C)?
  6 façons
  ABC
  ACB
  BAC
  BCA
  CAB
  CBA

Et si nous ajoutions un quatrième livre?

Permutations et combinaisons
Permutations

- Le **principe de multiplication**: Supposons qu'une tâche consiste en une séquence de n étapes indépendantes, où la première étape peut être effectuée de a_1 façons, la seconde peut être effectuée de a_2 façons, et ainsi de suite. Ensuite, toute la procédure peut être complétée de $a_1 \times a_2 \times \cdots a_n$ manières.
- *Exemple*: lors de l'achat d'une voiture, vous pouvez choisir parmi 3 types de moteurs, 4 types de modèles et 3 packages, et chaque voiture est disponible en 8 couleurs possibles. Combien de choix différents sont disponibles? Solution: Selon le principe de multiplication, il existe 3 * 4 * 3 * 8 = 288 façons dont nous pourrions faire un achat.

Permutations et combinaisons
Permutations

- En se basant sur le principe de multiplication, pour trouver le nombre de façons dont on peut insérer n lettres distinctes dans alors n intervalles consécutifs, on forme le produit des nombres $(n-1)$, $(n-2)$, …, 1 pour obtenir $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 1$ manières.
- Le produit ci-dessus est $n!$ (**factorielle n**).

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 1$$

- Le nombre de permutations de n objets <u>distincts</u> est $n!$.

Permutations et combinaisons
Permutations

Exercice

De combien de manières pouvons-nous disposer 4 livres de mathématiques, 5 livres de chimie et 6 livres de psychologie les uns à côté des autres sur une étagère si les livres sont tous distincts et les livres du même sujet doivent rester ensemble.

Nous organisons d'abord les sujets, 3 sujets: 6 façons.

Ensuite, nous organisons 4 livres de mathématiques: 24 façons.

Ensuite, nous organisons 5 livres de chimie: 120 façons.

Ensuite, nous organisons 6 livres de psychologie: 720 façons.

Le processus d'arrangement se compose de 4 étapes successives, nous appliquons le principe de multiplication.

Le nombre total d'arrangements est de 6 * 24 * 120 * 720 = 12 441 600

Permutations et combinaisons
Combinaisons

- Ce n'est pas toujours le cas que l'ordre des articles compte!
- Une **combinaison** est une sélection non ordonnée (ou un sous-ensemble d'éléments) à partir d'un ensemble donné d'éléments.

Permutations et combinaisons
Combinaisons

- *Exemple de motivation 1*:
  Comment pouvons-nous sélectionner un président, un vice-président et un trésorier d'un club de 10 membres?
  $\Rightarrow$ trio ordonné
  Ali en tant que président, Fatima en tant que vice-présidente et Mohamad en tant que trésorier **est différent de**
  Fatima en tant que président, Mohamad en tant que vice-président et Ali en tant que trésorier.

  Il ne suffit pas de lister les 3 candidats, il faut les commander.
  C'est un problème de permutation

Permutations et combinaisons
Combinaisons

- *Exemple de motivation 1*:
  Pour sélectionner k = 3 membres ou sur n = 10 personnes: Il existe 10 (c'est-à-dire n) façons de sélectionner le président, 9 (c'est-à-dire) − 1) façons de sélectionner le vice-président et le dernier choix (k) 8 (c.-à-d. n − k + 1) façons de sélectionner le trésorier.

- Le nombre de permutations de k sur n objets distincts est
$$n\times(n-1)\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)$$

Permutations et combinaisons
Combinaisons

- Exemple de motivation 2:
  Si vous avez 3 billets supplémentaires pour un match de football et que vous avez 10 amis, de combien de façons pouvez-vous sélectionner le trio chanceux?
  Ici, l'ordre n'a pas d'importance!
  Le choix d'Ali, Fatima et Mohamad est le même que Fatima, Ali et Mohamad. Les deux groupes représentent le même trio d'individus.

C'est un problème de combinaison

Permutations et combinaisons
Combinaisons

- Pour répondre à l'exemple de motivation 2, considérez ce qui suit: Envisagez un concours de programmation avec 7 équipes. À l'issue des préliminaires, les 3 meilleures équipes se qualifient pour les finales. Combien de résultats possibles y a-t-il pour les 3 équipes qui avanceront?
  Solution:
  7 équipes étiquetées de A à G Par exemple, ACD doit être compté une fois et non 6 fois! L'ordre n'est pas important: nous comptons une fois ACD, ADC, CDA, CAD, DCA et DAC. Nous divisons par 6 (le nombre de permutations) Nous avons donc 7 * 6 * 5 = 210 façons de permuter 3 sur 7, mais comme l'ordre n'a pas d'importance, nous divisons 210 par 6, pour obtenir 35.

Permutations et combinaisons
Combinaisons

- Le nombre de combinaisons de k objets choisit parmi n objets distincts:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)}{k!}$$

- $\binom{n}{k}$ se prononce «choisir k parmi n»
- Si nous multiplions le numérateur et le dénominateur par $(n-k)!$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Permutations et combinaisons
Combinaisons

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- Les nombres k et $n - k$ dans le dénominateur s'additionnent à n.
- On peut remplacer k par $n - k$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

Permutations et combinaisons
Combinaisons

Exercice

Déterminer le nombre de différents comités de 5 membres qui peuvent être formés à partir d'un ensemble de 14 personnes?

Nous choisissons un sous-ensemble de 5 éléments parmi un ensemble de 14 éléments.

$$\binom{14}{5} = \frac{14!}{5!\times 9!} = \frac{14\times 13\times 12\times 11\times 10}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 14\times 13\times 11 = 2002$$

comités.

Plan

- Préliminaires mathématiques
- Induction mathématique
- Permutations et combinaisons
- Triangle de Pascal et identités combinatoires

Blaise Pascal

Blaise Pascal was a French mathematician, physicist, inventor, philosopher, writer and Catholic theologian.

Blaise Pascal, né le 19 juin 1623 à Clermont en Auvergne et mort le 19 août 1662 à Paris, est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien franç

Triangle de Pascal et identités combinatoires Triangle de Pascal

							1								Ligne 0
						1		1							Ligne 1
					1		2		1						Ligne 2
				1		3		3		1					Ligne 3
			1		4		6		4		1				Ligne 4
		1		5		10		10		5		1			Ligne 5
	1		6		15		20		15		6		1		Ligne 6
1		7		21		35		35		21		7		1	Ligne 7
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

- Il y a $n + 1$ entrées dans la ligne n, et nous appelons les entrées successives de la ligne n, entrées de zéro à n.

Triangle de Pascal et identités combinatoires
Triangle de Pascal

Exercice

Déterminez la ligne 8 du triangle de Pascal.

									1									Ligne 0
								1		1								Ligne 1
							1		2		1							Ligne 2
						1		3		3		1						Ligne 3
					1		4		6		4		1					Ligne 4
				1		5		10		10		5		1				Ligne 5
			1		6		15		20		15		6		1			Ligne 6
		1		7		21		35		35		21		7		1		Ligne 7
1		8		28		56		70		56		28		8		1		

Triangle de Pascal et identités combinatoires
Triangle de Pascal

1								Ligne 0
1	1							Ligne 1
1	2	1						Ligne 2
1	3	3	1					Ligne 3
1	4	6	4	1				Ligne 4
1	5	10	10	5	1			Ligne 5
1	6	15	20	15	6	1		Ligne 6
1	7	21	35	35	21	7	1	Ligne 7
.	.	.	.	.	.	.	.	
$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$	

Triangle de Pascal et identités combinatoires
Triangle de Pascal

$$\binom{5}{2} = \frac{5\times 4}{2} = 10 = 4 + 3 + 2 + 1$$

1								Ligne 0
1	1							Ligne 1
1	2	1						Ligne 2
1	3	3	1					Ligne 3
1	4	6	4	1				Ligne 4
1	5	10	10	5	1			Ligne 5
1	6	15	20	15	6	1		Ligne 6
1	7	21	35	35	21	7	1	Ligne 7

. . . .

- Ces nombres sont les coefficients du développement de $(a+b)^n$
- $\binom{n}{k}$ sont communément appelés coefficients binomiaux.

Triangle de Pascal et identités combinatoires
Récursion

							1								Ligne 0
						1		1							Ligne 1
					1		2		1						Ligne 2
				1		3		3		1					Ligne 3
			1		4		6		4		1				Ligne 4
		1		5		10		10		5		1			Ligne 5
	1		6		15		20		15		6		1		Ligne 6
1		7		21		35		35		21		7		1	Ligne 7
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

- La génération de la ligne n à partir de la ligne $n-1$ peut également être effectuée:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Triangle de Pascal et identités combinatoires
Les lignes du triangle de Pascal

1								1									Ligne 0
2							1		1								Ligne 1
4						1		2		1							Ligne 2
8					1		3		3		1						Ligne 3
16				1		4		6		4		1					Ligne 4
32			1		5		10		10		5		1				Ligne 5
64		1		6		15		20		15		6		1			Ligne 6
128	1		7		21		35		35		21		7		1		Ligne 7

. . . .

- La somme des entrées de la ligne n du triangle de Pascal est 2^n.

Triangle de Pascal et identités combinatoires
Les lignes du triangle de Pascal

- Théorème binomial : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- Si nous posons a et b égaux à 1:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Triangle de Pascal et identités combinatoires
Plusieurs belles identités

- Théorème binomial : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- Si on pose a = 1 et b = −1 :

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{k}$$

- Si nous appelons la somme des termes positifs A et la somme des termes négatifs B, alors $A + B = 0$, donc $B = -A$, et $A + (-B) = 2^n$.
- Ceci implique que $\sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$

Triangle de Pascal et identités combinatoires
Plusieurs belles identités

- Théorème binomial : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- Si on pose a = 1 et b = 2 :

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

- Pour généraliser, si on pose a = 1 et b = x :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Triangle de Pascal et identités combinatoires
Plusieurs belles identités

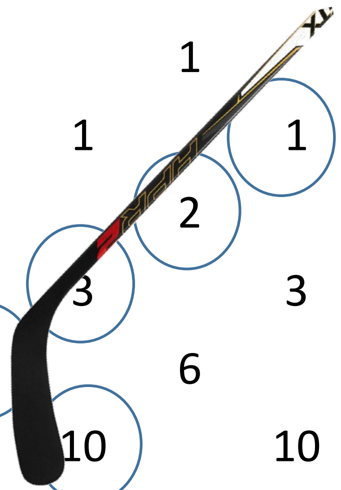
- À partir de $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, , on peut prouver (faire la dérivée les deux côtés) $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$

- Si nous multiplions les deux côtés par x, nous obtenons

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k$$

Triangl[illegible]Pascal et identités combinatoires
Tri[illegible]e Pascal

REVISITED



1	Ligne 0
1 1	Ligne 1
1 2 1	Ligne 2
1 3 3 1	Ligne 3
1 4 6 4 1	Ligne 4
1 5 10 10 5 1	Ligne 5
1 6 15 20 15 6 1	Ligne 6
1 7 21 35 35 21 7 1	Ligne 7
. . . .	

- Les coefficients binomiaux satisfont (appelé **théorème du bâton de hockey**)

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{k+r}{k}=\binom{k+r+1}{k+1}$$

Triangle de Pascal et identités combinatoires
Plusieurs belles identités

- Le théorème du bâton de hockey

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{k+r}{k} = \binom{k+r+1}{k+1}$$

- Lorsque k = 1, l'équation ci-dessus devient

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (r+1) = \binom{r+2}{2} = \frac{(r+2)\times(r+1)}{2}.$$

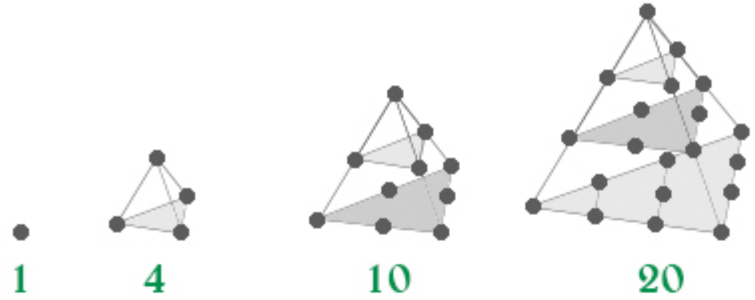
- Lorsque k = 2, l'équation ci-dessus devient

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{r+2}{2} = \binom{r+3}{3}$$

- Nous pouvons prouver $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{r}{2} = \binom{r+1}{3}$

Triangle de Pascal et identités combinatoires
Plusieurs belles identités

- $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{r}{2} = \binom{r+1}{3}$
- Le $\boldsymbol{r}$**ème nombre tétraédrique** est le nombre total de points dans une pyramide à base triangulaire, où le nombre de points dans la couche i est égal au $i$ème nombre triangulaire.
- Le $\boldsymbol{r}$**ème nombre tétraédrique** est égal à $\binom{r+1}{3}$.
  Soit r = 0, on obtient 1
  Soit r = 1, on obtient 3
  Soit r = 2, on obtient 6
  Soit r = 3, on obtient 10
  Ainsi une pyramide triangulaire à 3 niveaux contient 1 + 3 + 6 + 10 = 20 points .



Triangle de Pascal et identités combinatoires
Plusieurs belles identités

- Nous pouvons prouver

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$